Elliptischen Funktionen

von

C. Hermite.

Aus dem Französischen übertragen

und

mit einem Anhange versehen

von

Leopold Natani.

Berlin, 1863.

Diese Uebersicht bildet im Original den Anhang z
chsten Ausgabe von Lacroix's *Traité élementaire
lcul différentiel et intégral.* Sie giebt die Theorie d
liptischen Funktionen bis ausschliesslich zum Transfo
ationsproblem in sehr klarer, kurzer, übersichtlicher u
nfacher Weise, und möchte sie deshalb als besonde
eignet für Solche erscheinen, welche das Studium d
liptischen Funktionen beginnen wollen. Die Reichhalti
eit der Resultate, die sinnreiche Form der Entwickelu
nd namentlich die vielfachen Andeutungen und Aussicht
nkte auf Theorien, die sich an den Gegenstand dies
ebersicht anknüpfen, werden auch das Interesse De
nigen erregen, welche bereits mit den elliptischen Fun
onen vertraut sind. So z. B. kann wohl auf die Seite
s 24 gegebene Reihenentwickelung mit unbestimmt
oefficienten hingewiesen werden, welche nicht allein
uche selbst vielfache Anwendung findet, sondern au
B. für die Darstellung des Transformationsproblems u
erwandter Theorien von grosser Wichtigkeit erschei
wie auf die kurze, die Funktionen mit vielfacher Peri
cität betreffende Notiz.

Der Uebersetzer glaubte durch die besondere Uebe
agung dieser Uebersicht dem deutschen Leser um
ehr einen Dienst zu erweisen, als in dem gedacht
lementarbuche dieselbe wohl nicht ganz an ihrer Ste
scheinen möchte. Es dürfte wohl nämlich jetzt allgeme
nerkannt sein, dass sich eine strenge und vollständi
ehandlung der elliptischen Funktionen nicht ohne g
isse von Cauchy herrührende Sätze über die zwisch
omplexen Grenzen genommenen Integrale geben läs

In der That ist die Kenntniss dieser Sätze, so wie de
Residuencalculs vom Verfasser vorausgesetzt worden, ohn
lass jedoch in der betreffenden Ausgabe von Lacroix
Lehrbuche dieselben hinzugefügt sind, was um so mehr z
beklagen ist, als diese Betrachtungen auch für ander
Zwecke wichtig sind und recht eigentlich in ein solche
Elementarbuch gehören. Der Uebersetzer hat sich dahe
veranlasst gesehen, diese Lücke in einem hinzugefügte
Anhange auszufüllen, und glaubt dadurch Denjenigen
welche sich des Buches zum ersten Studium bediene
wollen, einen Dienst geleistet zu haben; dass er daran de
Vollständigkeit wegen einige Entwickelungen geknüpft, di
nicht unmittelbar im Buche Anwendung finden, wird wol
auch Verzeihung finden.

In wie weit diese Darstellung eine selbstständige is
und in wie weit man sich hierbei an Briot und Bouquet'
Traité des fonctions doublement périodiques angeschlosse
hat, wird der Kundige leicht ersehen. Dass im Anhang
noch die Verwandlung der Integrale, welche eine Wurze
vierten Grades enthalten, auf die Form der elliptische
Integrale gegeben wurde, welche im Buche selbst, als da
Transformationsproblem berührend, nicht enthalten ist
rechtfertigt sich daraus, dass diese Verwandlung selbs
bei den einfacheren Anwendungen der elliptischen Funk
tionen nothwendig ist. Abgesehen von diesem Anhang
hat man sich auf eine möglichst treue Uebersetzung un
Verbesserung mehrerer Druckfehler beschränkt.

Der Uebersetzer.

Sei

Uebersicht

der

Theorie der elliptischen Funktion

Einleitung.

Bekanntlich giebt man den Namen: algebraische Funktion, jed
Bezug auf eine Variable ganzen Polynom, den Quotienten solcl
lynome und den Wurzeln von Gleichungen, deren erstes Glied
zug auf die Unbekannte und die Variable eine ganze Funkti
. Alle Funktionen, welche durch diese Definition, an welche
er erinnert haben, nicht bestimmt sind, nennt man Transcendent
B. Exponentialgrössen und Logarithmen, Sinus, Cosinus, T
nte eines Kreisbogens, oder die arcus sinus, arcus tangens u. s.
Diejenigen Funktionen von Funktionen, welche man durch al
aische Combinationen aus diesen obengenannten Transcenden
hält, sind offenbar ebenfalls transcendente Funktionen, und m
ht so ein, dass man deren Anzahl in's Unendliche vermeh
nnte, freilich ohne allen Nutzen. Aber wenn man das Feld
gebra verlässt und die Integralrechnung betrachtet, so geräth m
f natürlichem Wege und ganz von selbst auf eine wahrhaft fruc
re Quelle von unendlich viel neuen Funktionen, die wesentl
n einander verschieden sind, jede für sich eigenthümliche ana
che Eigenschaften, ausserdem aber gemeinschaftliche Charakt
sitzen, vermöge deren sie sich in grosse Kategorien bring
ssen, und deren tieferes Studium einer der interessantesten Geg

sten und elementarsten Grössen sind. Nach den Log
Kreisbogen kommen die elliptischen Funktionen, die
trachtung der Integrale $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}}$ sich erg
öffnen eine Reihe neuer Funktionen und stellen von
sagen das erste Glied dar. Ihnen ist dieser Abriss g
wir werden zunächst versuchen, von ihnen eine v
schauung zu geben, indem wir ihre hervortretendsten
skizziren.

Gemeinschaftliche Eigenschaften der trigonometrisch und elliptischen Funktionen.

Indem wir so eben an die Definition der algebraischen Fu nen erinnerten, sagten wir, dass sie einerseits die rationa lynome und Brüche, andererseits die Wurzeln der Gleichung (y, x) = 0 in sich schlössen, deren erstes Glied ganz und ratio in Bezug auf die Variable x und die Unbekannte y. Im ers ll haben die Funktionen nur einen einzigen Werth für jed ellen oder imaginären Werth von x, während sie im letztern le Werthe darbieten, als der Grad der Gleichung, welche finirt und die wir als irreducibel annehmen, Einheiten hat. nlicher Unterschied findet zwischen den einfachen Transcend n sin x, cos x, tang x und arc sin x, arc cos x, arc tang att; die Erstern gleichen den rationalen Polynomen und Brüch sie nur auf eine einzige Art bestimmt werden können, die Le rn dagegen lassen unendlich viel Werthe zu, und in dieser ehung kommen sie mit den Wurzeln einer Gleichung von une h hohem Grade überein. Ebenso verhält es sich offenbar mit xponentialgrösse e^x, und mit dem Logarithmus, den man als du e transcendente Gleichung (Gleichung von unendlich hohem Gra = x definirt sich vorstellen kann. Diese Beziehung, welche s f den ersten Blick darbietet, wird durch folgende Bemerkung stätigt und ergänzt. Für jeden reellen oder imaginären We r Variable hat man:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + . -$$

$$\lg(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$$

$$\arcsin x = x + \frac{x^3}{2.3} + \frac{1.3x^5}{2.4.5} + \frac{1.3.5x^7}{2.4.6.7} + \ldots$$

$$\operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$$

nur einen Sinn, so lange die Variable kleiner als Eins
annähernde Identität mit Polynomen ist nur in einem
Umfange möglich. Endlich kann man — und dies is
punkt — aus einem gegebenen Werthe, sei es der
grösse oder der trigonometrischen Funktionen, auf algeb
selbst rationalem Wege unendlich viel andere Wer
So berechnet man in der ebenen Trigonometrie, ind
dem Bogen, welcher 10″ enthält, ausgeht, alle Wertl
des Cosinus und der Tangente, welche in den Tafeln e
dies ist eine ebenso merkwürdige als wichtige Eiger
Funktionen, und sie ergiebt sich aus den Beziehungen

$$e^{x+y} = e^x\ e^y$$
$$\sin(x+y) = \sin x \cdot \cos y + \sin y \cos x$$
$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$
$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y},$$

deren zweite Glieder auf algebraischem Wege aus F
den Argumenten x und y zusammengesetzt sind.

Die nämlichen Eigenschaften finden wir in den
Funktionen, von welchen sie die wesentlichsten Chara
und wir können, indem wir das eben Gegebene zus
von den neuen Funktionen sagen: „Sie sind einförm
eine einzige Art zu bestimmende Funktionen, ration
analog, an die sie sich bis auf jede beliebige Grenze
beliebigen Umfange des Werthes der Variablen annä
ausserdem sind die Funktionen einer Summe zweier
und y algebraisch durch die Funktionen des Argument
Argumentes y ausdrückbar.“ So wie endlich der Expo

se Integrale unendlich vieldeutig sind!

B. Ueber die Periodicität der trigonometrischen und elliptischen Funktionen.

Diese wichtige Eigenschaft zeigt ganz besonders den Unt
ied, welcher die Funktionen, ihrer Natur nach, von den rationa
gebraischen Funktionen trennt, mit denen wir sie so eben v
chen haben, und drückt ihnen gewissermassen den augensche
hsten Charakter transcendenter Funktionen auf. Durch i
riodicität übrigens sind sinus und cosinus für fast alle Fragen
alysis so wichtig, von denjenigen Untersuchungen an, welche
strakten Eigenschaften ganzer Zahlen betreffen, bis zu den A
ndungen der Analysis in der Physik und Astronomie. Von dies
sichtspunkte aus ist es besonders interessant, das erste Glied
r langen Reihe der neuen Transcendenten zu untersuchen, welc
h an die trigonometrischen Funktionen, die ja lange Zeit all
kannt waren, unmittelbar anschliesst. Im Beginn ihrer Unt
chung machten Abel und Jakobi gleichzeitig die grosse E
ckung, dass die elliptischen Funktionen 2 Perioden haben, ei
man immer als reell annehmen kann, und eine, die nothwen
aginär ist. Jakobi hat ausserdem bewiesen, dass eine eindeut
nktion einer Variablen nicht mehr als 2 Perioden haben ka
d nach ihm hat Liouville, indem er die Theorie der dopp
riodischen Funktionen in ihrer ganzen Allgemeinheit behandel
zeigt, dass sie sich immer auf elliptische Funktionen zurückführ
sen, und so die Vermuthung Jakobi's ausser allen Zweifel
llt, dass diese Funktionen Alles in sich fassen, was die Analy
Bezug auf die genannte Periodicität in ihrem weitesten Si

Perioden.

I. Satz von Jakobi.

Sind a und b zwei Grössen, deren Verhältniss reell und i
ommensurabel ist, so weiss man aus der Theorie der Kettenbrüch
ass man sich an $\frac{a}{b}$ durch unendlich viel rationale Brüche $\frac{m}{n}$ a
ähern kann, derart, dass immer die Bedingung erfüllt wird:

$$\frac{a}{b} = \frac{m}{n} + \frac{\varepsilon}{n^2}$$

o ε kleiner als Eins ist. Hieraus folgt:

$$na - mb = \frac{\varepsilon b}{n}.$$

ber eine Funktion, welche die Perioden a und b hat, bleibt u
erändert, wenn man der Variablen eine Summe von ganzen Vie
chen dieser Grössen hinzufügt, also na — mb. Da man n
ross, als man will, nehmen kann (weil sonst $\frac{a}{b}$ nicht irrational wäre
kann die neue Periode $na - mb = \frac{\varepsilon b}{n}$ kleiner als jede gegebe
rösse gedacht werden, und es ist somit klar, dass es keine doppe
eriodische Funktion geben kann, wo das Verhältniss der Periode
eell und incommensurabel ist.

Auf denselben Schluss, d. h. auf eine unendlich kleine Period
der vielmehr eine solche, deren Modul unendlich klein ist, gerathe
ir, wenn wir 3 imaginäre Perioden annehmen:

$$a = \alpha + \alpha' \sqrt{-1}$$
$$b = \beta + \beta' \sqrt{-1}$$
$$c = \gamma + \gamma' \sqrt{-1}$$

Man kann nämlich unendlich viel ganze Zahlen m n p finden, deran
ass der Modul von am + bn + cp kleiner als jede gegebene Grös
t. Betrachten wir zu dem Ende die ternäre quadratische Form:

$$f = (\alpha x + \beta y + \gamma z)^2 + (\alpha' x + \beta' y + \gamma' z)^2 + z^2$$

se Werthe durch m n p bezeichnet, sich ergiebt:

$$(\alpha m+\beta n+\gamma p)^2+(\alpha' m+\beta' n+\gamma' p)^2+\frac{p^2}{\lambda^2}<\sqrt[3]{2\Delta}$$

o um so mehr

$$(\alpha m+\beta n+\gamma p)^2+(\alpha' m+\beta' n+\gamma' p)^2<\sqrt[3]{2\Delta}$$

nn man also auch nicht gleichzeitig setzen:

$$\alpha m+\beta n+\gamma p=o,$$
$$\alpha' m+\beta' n+\gamma' p=o,$$

h. $$am+bn+cp=o,$$

h. sind a b c 3 wirklich verschiedene Perioden, so sieht m ch, dass mit wachsendem λ Δ so klein werden kann, als m ll, und dass man auf Perioden kommt, deren Modul, wie wir ob sagt haben, in's Unendliche abnimmt. Indess haben wir an mmen, dass die Determinante der quadratischen Form nicht N . Aber in diesem besondern Fall betrachtet man statt der t ren die binäre Form:

$$(\alpha x+\beta y)^2+(\alpha' x+\beta' y)^2+\frac{y^2}{\lambda^2}$$

ter der Bedingung, dass $\alpha\beta'-\beta\alpha'=0$ ist, die Determinante nn: $\frac{\alpha^2+\alpha'^2}{\lambda^2}$, und wird niemals verschwinden können. Nehn r nun an, dass für $x=m$, $y=n$ ein Minimum einträte, so w in:

$$(\alpha m+\beta n)^2+(\alpha' m+\beta' n)^2+\frac{n^2}{\lambda^2}<\sqrt{\frac{4(\alpha^2+\alpha'^2)}{3\lambda^2}}$$

d um so mehr

$$(\alpha m+\beta n)^2+(\alpha' m+\beta' n)^2<\sqrt{\frac{4(\alpha^2+\alpha'^2)}{3\lambda^2}},$$

an kann also wie oben schliessen, und gelangt zu einer Peri n + bn, deren Modul beliebig klein ist. Dieser besondere I übrigens in dem, welchen wir zuerst betrachtet haben, mit eschlossen, denn die Bedingung $\alpha\beta'-\beta\alpha'=0$ drückt aus, d

Verhältniss $\frac{\alpha+\alpha'\sqrt{-1}}{}$ $\frac{a}{}$ ... reell ist

ährend in rein analytischer Beziehung, z. B. wenn man als De
ition die Reihen annimmt:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \dots$$

iese wichtige Eigenschaft viel versteckter ist.

Nicht anders ist es in Betracht der Exponentialgrösse, die a
renze eines ganzen Polynoms $\left(1 + \frac{x}{m}\right)^m$ oder als eine Rei
$+ \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \dots$ betrachtet werden kann. Indess h
an für die trigonometrischen Funktionen noch andere Ausdrück
o der periodische Charakter ebenso unmittelbar erscheint, wie
er Geometrie, und die zu untersuchen um so interessanter ist, a
e durch eine leichte Verallgemeinerung ganz von selbst auf Fun
onen einer höhern Ordnung führen, welche 2 verschiedene Period
aben. Als erstes Beispiel nehmen wir die Entwickelung in ein u
ndliches Produkt:

$$1)\quad \left\{ \begin{aligned} \sin \pi x = \pi x \left(1 - \frac{x}{1}\right)\left(1 - \frac{x}{2}\right)\left(1 - \frac{x}{3}\right) \dots \\ \left(1 + \frac{x}{1}\right)\left(1 + \frac{x}{2}\right)\left(1 + \frac{x}{3}\right) \dots, \end{aligned} \right.$$

elche man für unendliches m als die Grenze folgenden Polyno
etrachten kann:

$$\varphi(x) = x\left(1 - \frac{x}{1}\right)\left(1 - \frac{x}{2}\right) \dots \left(1 - \frac{x}{m}\right),$$
$$\left(1 + \frac{x}{1}\right)\left(1 + \frac{x}{2}\right) \dots \left(1 + \frac{x}{m}\right).$$

Man sieht aber sogleich, dass:

$$\varphi(x+1) = -\varphi(x)\frac{m+1+x}{m-x},$$

$$\pi \cot \pi x = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} + \dots$$
$$+ \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} + \dots .$$

tzt man x+1 statt x, so wird das 2. Glied:

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \dots$$
$$+ \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+4} + \dots,$$

d reproducirt sich daher, denn die Partialbrüche haben nur ih atz geändert, indem jeder um eine Stelle vorrückt. Durch e chte Verallgemeinerung erhält man die folgende Art eine Funkt. szudrücken, welche eine beliebige Periode hat, nämlich:

$$\varphi(x)\,\varphi(x-a)\,\varphi(x-2a)\,\varphi(x-3a)\dots$$
$$\varphi(x+a)\,\varphi(x+2a)\,\varphi(x+3a)\dots$$

$$\varphi(x) + \varphi(x-a) + \varphi(x-2a) + \varphi(x-3a) + \dots$$
$$+ \varphi(x+a) + \varphi(x+2a) + \varphi(x+3a) + \dots .$$

ır die Bedingung der Convergenz ist bei dem unendlichen Prod ler der Reihe zu erfüllen. Wenn man ihr genügen kann, ind an für φ (x) eine an sich periodische Funktion annimmt, so th man auf den Ausdruck einer doppelt periodischen Funkti ne solche ist z. B. die Entwickelung:

$$\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\sin(x-a)} + \frac{1}{\sin(x-2a)} + \frac{1}{\sin(x-3a)} + \dots$$
$$+ \frac{1}{\sin(x+a)} + \frac{1}{\sin(x+2a)} + \frac{1}{\sin(x+3a)} + \dots,$$

elche sich genau ebenso in der Theorie der elliptischen Funktio orfindet, und deren Convergenz man leicht beweisen kann, w imaginär ist. Ist aber a reell, so convergiren die höhern Glie er Reihe nicht nach Null hin, und es findet offenbar Diverg att, was mit dem übereinstimmt, was oben über die Unmöglichl

ogie auf Ausdrücke von der Form

$$\prod x\left(1+\frac{x}{ma+nb}\right),$$

o m und n ebenfalls ganze Werthe annehmen, nur die Combinati
$= 0$, $n = 0$ ausgeschlossen. Aber die genauere Untersuchu
ieser Ausdrücke hat einen eben so wichtigen als sonderbaren U
tand zu Tage gebracht. Cayley hat in einer Abhandlung über d
oppelt periodischen Funktionen, welche im Liouville'schen Journ
and X. veröffentlicht ist, gezeigt, dass ihr Werth wesentlich v
em Gesetze abhängt, nach welchem man gleichzeitig m und n in
nendliche wachsen lässt. So z. B. erhält man einen analytisch
ollständig bestimmten und gegebenen Ausdruck, wenn man sich d
edingung stellt, dass m und n Coordinaten eines Punktes im Inne
ines Kreises $x^2 + y^2 = R^2$ sein sollen, dessen Radius man bis in
nendliche wachsen lässt. Wenn man aber den Kreis durch ei
ndere Curve ersetzt, so erhält man als Grenze eine andere Fun
on, und anstatt auf diese Art doppelt periodische Funktionen da
ustellen, die sich reproduciren könnten, wenn man für x $x + a$ u
$+ b$ setzt, kommt man auf Funktionen, die sich mit einer E
onentialgrösse multiplicirt reproduciren. Diese Funktionen geb
ber in der That die analytischen Fundamente, auf welchen, wie w
ehen werden, die ganze Theorie der elliptischen Funktionen beru
ber man wird sehen, dass die Vermuthung, welche auf der Analog
er Ausdrücke

$$\prod x\left(1+\frac{x}{m}\right),$$

$$\prod x\left(1+\frac{x}{ma+nb}\right)$$

egründet war, sich nicht bewährt, und dass die zweiten Funktione
icht gerade doppelt periodisch sind, obgleich sie die wesentlichen El
ente zu den doppelt periodischen Funktionen geben. Da wir dies
einen und interessanten Untersuchungen nicht in ihrer ganzen Au

III. Von dem Ausdruck $\prod x\left(1+\frac{x}{m}\right)$.

Die Hauptsache, auf welche wir die Aufmerksamkeit lenk
steht darin, dass dies Produkt nur periodisch ist, wenn man
die schon bezeichnete Grenze betrachtet:

$$x\left(1-\frac{x}{1}\right)\left(1-\frac{x}{2}\right)\ldots\left(1-\frac{x}{m}\right)$$
$$\left(1+\frac{x}{1}\right)\left(1+\frac{x}{2}\right)\ldots\left(1+\frac{x}{m}\right)$$

enn m unendlich gross wird. Setzen wir in der That

$$1)\quad \left\{\begin{aligned}\varphi(x) = x\left(1-\frac{x}{1}\right)\left(1-\frac{x}{2}\right)\ldots\left(1-\frac{x}{n}\right),\\ \left(1+\frac{x}{1}\right)\left(1+\frac{x}{2}\right)\ldots\left(1+\frac{x}{m}\right),\end{aligned}\right.$$

d lassen wir m und n in's Unendliche zunehmen, unter der
ngung, dass

$$m = \omega n$$

i, wo ω eine vorher zu bestimmende Constante ist. Wir wer
hen, dass für $n = \infty$, der Grenzwerth von $\varphi(x)$ von ω abhä
d nur dann periodisch ist, wenn $\omega = 1$ ist.

Sei der Kürze wegen:

$$\sum\frac{1}{x-n} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \ldots + \frac{1}{x-n},$$
$$\sum\frac{1}{x+m} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \ldots + \frac{1}{x+m},$$

giebt Gleichung 1), indem man von beiden Gliedern die lo
hmische Ableitung nimmt:

$$2)\qquad \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \sum\frac{1}{x-n} + \sum\frac{1}{x+m}.$$

s ist aber identisch:

$$\sum\frac{1}{x-n} = \sum\left(\frac{1}{x-n}+\frac{1}{n}\right) - \sum\frac{1}{n} = \sum\frac{x}{nx-n^2} - \sum$$

o kann man schreiben:

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \sum \frac{x}{nx - n^2} - \sum \frac{x}{mx + m^2} + \lambda,$$

nd man hat die Grenze des 2. Gliedes zu bestimmen, wenn m un
in's Unendliche wachsen. Aber die Reihen $\sum \frac{x}{nx-n^2}$, $\sum \frac{x}{mx+m^2}$
nd beide convergent, haben einzeln endliche Summen, und ihr
renzen sind somit völlig bestimmt, wobei die Bestimmung $m = \omega$
einen Einfluss ausübt. Aber anders ist es in Bezug auf die Reihe
$\sum \frac{1}{m}$, $\sum \frac{1}{n}$, deren Summen mit m und n in's Unendliche wach
en. λ wird also die unbestimmte Differenz zwischeu 2 Unendlich
eiten, und es handelt sich darum, ihren Werth zu ermitteln. Z
em Ende wollen wir die Reihe $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{m}$ durch ein b
immtes Integral ausdrücken, wobei wir von der Relation ausgehen

$$\int_0^1 x^{\mu-1}\,dx = \frac{1}{\mu}$$

an hat dann:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{m} = \int_0^1 dx\,(1 + x + \ldots + x^{m-1})$$

$$= \int_0^1 \frac{1 - x^m}{1 - x}\,dx,$$

nd die Differenz der beiden ähnlichen Reihen $\sum \frac{1}{m}$, $\sum \frac{1}{n}$ wi
usgedrückt durch:

$$\int_0^1 dx\,\frac{1 - x^m}{1 - x} - \int_0^1 dx\,\frac{1 - x^n}{1 - x} = \int_0^1 dx\,\frac{x^n - x^m}{1 - x}.$$

un ist noch der Werth dieses Integrals für $m = \omega n$ und $n = \omega$
u bestimmen. Man erhält ihn ...

$$= \int_0 dz \frac{\left(1 - \frac{\cdot}{n}\right) - \left(1 - \frac{\cdot}{n}\right)}{z}$$

d wenn n unendlich wird, kommt das bekannte Integral:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-z} - e^{-\omega z}}{z} dz = \lg \omega$$

e durch λ bezeichnete Grösse hat also den Werth $\lg \omega$ und v
nwindet nur für $\omega = 1$, in diesem Falle wird Gleichung 2):

$$\frac{\varphi' x}{\varphi x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \cdots + \frac{1}{x-m}$$

$$+ \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-2} + \cdots + \frac{1}{x+m}$$

ist klar, dass diese beiden unendlichen Reihen durch folgen
nvergente Reihe ersetzt werden können:

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2-1} + \frac{2x}{x^2-4} + \ldots + \frac{2x}{x^2-m^2} + \ldots$$

e Summe derselben ist $\pi \cot \pi x$. Aber im Allgemeinen, so lan
s Verhältniss ω zwischen m und n willkürlich ist, hat man:

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \pi \cot \pi x + \lg \omega.$$

so:

$$\int dx \frac{\varphi' x}{\varphi x} = \lg \sin \pi x + x \lg \omega + \text{const.}$$

d also:

$$\varphi(x) = C\, e^{x \lg . \omega} \sin \pi x,$$

o C eine Constante ist.

Dieses Resultat macht die eigenthümliche Unbestimmtheit k
elche der Ausdruck $\prod x \left(1 + \frac{x}{m}\right)$ hat, und kann dazu dien
e analoge Eigenschaft in Bezug auf den doppelt unendlic

on einem allgemeinen Gesichtspunkt aus kann man fragen, ob
ndeutige und ganze Funktionen giebt, welche 2 Perioden habe
ies ist der Gegenstand des folgenden, von Liouville herrührende
atzes, auf welchem dieser ausgezeichnete Mathematiker eine vol
ändige Theorie der doppelt periodischen Funktionen gegründet hat.

IV. Liouville'scher Satz.

Dieser Satz sagt uns, dass jede eindeutige Funktion f (x), welch
Perioden a und b hat, sich nothwendig auf eine Constante red
rt, wenn sie für keinen Werth der Variablen unendlich wird. U
ies zu beweisen, gehen wir von dem allgemeinen Ausdruck jed
anzen eindeutigen Funktion mit Periode a aus:

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} A_m e^{2m\frac{i\pi x}{a}}.$$

Die Bedingung $f(x+b) = fx$ giebt die Gleichung:

$$\sum A_m e^{2m\frac{i\pi b}{a}} e^{2m\frac{i\pi x}{a}} = \sum A_m e^{2m\frac{i\pi x}{a}}.$$

Multiplicirt man beide Glieder mit $e^{-2n\frac{i\pi x}{a}}$ und integrirt in den Gre
en 0 und a, so erhält man:

$$A_n e^{2n\frac{i\pi b}{a}} = A_n.$$

Hieraus folgt, dass $A_n = 0$ ist. Denn da das Verhältniss der b
en Perioden $\frac{b}{a}$ imaginär ist, kann nicht $e^{2n\frac{i\pi b}{a}} = 1$ sein, auss
wenn $n = 0$ ist. Also A_n ist $= 0$ für jeden Werth von n auss
für $n = 0$, und f (x) reducirt sich auf die Constante A_0. —

Dieser eben so wichtige als einfache Satz zeigt, dass die dopp
periodischen Funktionen nothwendiger Weise Transcendenten v

ppelt periodischer Funktionen aus dem allgemeinen Ausdrucke:

$$x)\,\varphi(x-a)\,\varphi(x-2a)\,\varphi(x-3a)\ldots\varphi(x+a)\,\varphi(x+2a)\,\varphi(x+3$$

stehen zu lassen, indem man für φx eine ganze periodische Fun n nimmt. Aber obgleich diese Ausdrücke keine doppelt per chen Funktionen geben, so geben sie doch die Zähler und Nenn rselben, und hiermit treten wir im eigentlichen Sinne in die U rsuchung der elliptischen Funktionen ein.

Definition

~~Addition~~ der Funktionen Θ (x), H (x), ihr Ausdru in Produkten und Reihen.

Höchst wichtig und interessant ist die genaue Untersuchu rjenigen Kunstgriffe, durch welche man, von den oben auseinan setzten Grundbegriffen ausgehend, zur Kenntniss einer ne nktion gelangt, aus welcher eine ganz neue Reihe analytisc egriffe entsteht; und ein vollständiges Handbuch über diesen rn Gegenstand dürfte keine dieser Methoden ausschliessen, welc Bezug auf die Funktionen Θ (x) und H (x) entdeckt und benu orden sind. Hier aber werden wir nur zwei geben, deren eine s turgemäss an das Vorhergehende anschliesst, und deren and s dazu führen wird, einen Abriss von den analogen Funktion t mehreren Variablen und von einer höhern Ordnung zu geb elche man Abelsche oder hyperelliptische Funktionen nennt.

I. Erste Methode.

Wir bedienen uns in dem Folgenden derjenigen Bezeichnung

ist. Indem unter φ (x) eine ganze Fu
verstanden wird, betrachten wir statt de

$$\varphi(x)\,\varphi(x-iK')\,\varphi(x-2iK')\dots\varphi($$

von denen wir wissen, dass sie nicht zu
stimmten Funktion dienen können, den f

$$\Phi(x) = \varphi(x+iK')\,\varphi(x+3iK')\,\varphi($$
$$\varphi(-x+iK')\,\varphi(-x+3iK$$

Man hat zunächst

$$\Phi(x+2K) = \Phi$$

und es ergiebt sich unmittelbar

$$\Phi(x+2iK') = \Phi(x)\frac{\varphi(-}{\varphi(}$$

Man kommt also auf keine doppelte
diese neue Art von Ausdrücken führt,
vollständig definirte und bestimmte Funk

Sei z. B. die ganze Funktion, welch

$$\varphi(x) = 1 - e$$

so hat man

$$\frac{\varphi(-x-iK')}{\varphi(x+iK')} = -\,e$$

Setzt man noch:

$$q = e^{-\pi\frac{K'}{K}},$$

so ergiebt sich:

$$\varphi[x+(2m+1)iK']\,\varphi[-x+$$
$$= 1 - 2q^{2m+1}\cos\frac{\pi x}{K}$$

$$\frac{(x)}{(x)} = \frac{2\pi}{K} \sin \frac{\pi x}{K} \left(\frac{q}{1 - 2\,q \cos \frac{\pi x}{K} + q^2} + \frac{q^3}{1 - 2\,q^3 \cos \frac{\pi x}{K} + \cdots} \right.$$

$$\left. + \frac{q^5}{1 - 2\,q^5 \cos \frac{\pi x}{K} + q^{10}} + \ldots \right)$$

lche im angenommenen Falle immer convergent ist, welchen reel er imaginären Werth die Variable x auch habe.

Indem wir als Factor eine Constante A einführen, setzen t Jacobi:

$$\theta(x) = A\,\Phi(x)$$

er:

$$\theta\left(\frac{2Kx}{\pi}\right) = A\,(1 - 2q \cos 2x + q^2)\ (1 - 2q^3 \cos 2x + q^6)$$
$$(1 - 2q^5 \cos 2x + q^{10}) \ldots .$$

es ist die erste der von uns zu definirenden Funktionen. Sie llt die Relationen:

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta(x + 2K) = \theta(x), \\ \theta(x + 2iK') = -\,\theta(x)\, e^{-\frac{i\pi}{K}(x + iK')}, \end{array} \right.$$

lche der Theorie als Grundlage dienen.

Sei 2tens:

$$H(x) = -\,i\,\theta(x + iK')\, e^{\frac{i\pi}{4K}(2x + iK')},$$

findet man unmittelbar die Beziehungen, welche der vorgehen nz ähnlich sind:

tion, denn wegen der Relationen 1)

$\frac{H(x)}{\theta(x)}$ den Bedingungen:

$$\frac{H(x+2K)}{\theta(x+2K)} =$$

$$\frac{H(x+4K)}{\theta(x+4K)} =$$

$$\frac{H(x+2iK')}{\theta(x+2iK')} =$$

Setzen wir noch

$$\theta_1(x) = \theta(x$$

$$H_1(x) = H(x$$

d. h.

$$\theta_1\left(\frac{2Kx}{\pi}\right) = A\,(1 + 2q\cos 2x + q^2)$$
$$(1 + 2q^5\cos 2x + q^{10})\,.$$

$$H_1\left(\frac{2Kx}{\pi}\right) = A\,.\,2\sqrt[4]{q}\cos x(1 + 2q^2\cos$$
$$(1 + 2q^6\cos 2x + q^{12})\,.\,.\,.$$

Diese beiden neuen Funktionen führen

3) $\begin{cases} \theta_1(x+2K) = \theta_1(x \\ \theta(x+2iK') = \theta_1(x \end{cases}$

4) $\begin{cases} H_1(x+2K) = -H_1 \\ H_1(x+2iK') = H_1(x \end{cases}$

ten Gleichungen zu geben, welche man erhält, indem man jed
er Funktionen gleich Null setzt, nämlich:

$$\Theta(x) = 0, \quad x = 2mK + (2m'+1)\,iK',$$

$$H(x) = 0, \quad x = 2mK + 2m'iK',$$

$$\Theta_1(x) = 0, \quad x = (2m+1)K + (2m'+1)\,iK',$$

$$H_1(x) = 0, \quad x = (2m+1)K + 2m'iK',$$

m und m' beliebige ganze Zahlen sind. Zu den verschiedene
eben gegebenen Grundbeziehungen fügen wir noch die folgende
che oft angewandt werden, hinzu:

$$\Theta(x+iK') = i\,H(x)\,e^{-\frac{i\pi}{4K}(2x+iK')},$$

$$H(x+iK') = i\,\Theta(x)\,e^{-\frac{i\pi}{4K}(2x+iK')},$$

$$\Theta_1(x+iK') = H_1(x)\,e^{-\frac{i\pi}{4K}(2x+iK')},$$

$$H_1(x+iK') = \Theta_1(x)\,e^{-\frac{i\pi}{4K}(2x+iK')}.$$

Endlich machen wir noch darauf aufmerksam, dass diese B
hungen sich nicht ändern, wenn man für x λx, für K und K'
d $\lambda K'$ setzt, so dass man eine der Perioden beliebig annehm
o z. B. $K = 1$ setzen kann. Denn von diesem speciellen F
rd man sogleich zu unsern allgemeinen Ausdrücken zurückgefüh
ber diese Specialisirung ist von der, welche wir gebrauchen w
n, verschieden. Wir werden von der letzteren sprechen, sob
e sich naturgemäss darbietet.

$$\frac{\sum A_m e^{2m\frac{i\pi x}{a}}}{\sum B_m a^{2m\frac{i\pi x}{a}}}$$

zu suchen.

Versuchen wir also A_m und B_m durc
stimmen:

$$\frac{\sum A_m e^{2m\frac{i\pi x}{a}}}{\sum B_m e^{2m\frac{i\pi x}{a}}} = \frac{\sum A_m e^{2\cdots}}{\sum B_m e^{2\cdots}}$$

wo b die 2. Periode ist.

Sei der Abkürzung wegen

$$q = e^{i\pi\frac{b}{a}},$$

durch Wegschaffen der Nenner erhält man:

$$\sum A_m e^{2m\frac{i\pi x}{a}} \sum B_m e^{2m\frac{i\pi}{a}(\cdots}$$

$$= \sum B_m e^{2m\frac{i\pi x}{a}} \sum A_m e^{2m\frac{i\pi}{a}(\cdots}$$

und in dieser neuen Gleichung sind die Coe
ponentialgrösse $e^{\frac{2\mu i\pi x}{a}}$ gleich zu setzen. Ma
dass diese Coefficienten die Reihen bilden:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} A_{(\mu-m)} B_m q^{2m} \quad \text{und} \quad \sum_{-\infty}^{+\infty} A_{(\cdots}$$

derart, dass, wenn man für den Augenblick

ihen zu erhalten, indem man sie identisch macht. Zu dem Er
zen wir:

$$A_{(\mu - m)} B_m q^{2m} = A_{(\mu - n)} B_n q^{2(\mu - n)}$$

d nehmen an, dass n als Funktion von m gegeben sei, dera
ss diese beiden Grössen gleichzeitig die vollständige Reihe
nzen Zahlen darstellen können. Dies geschieht, wenn man set

$$n = m + k,$$

k eine ganze Zahl ist, und nachdem man die vorige Gleichu
ter die Form gebracht hat:

$$\frac{A_{\mu - m}}{q^{2(\mu - n)} A_{\mu - n}} = \frac{B_n}{q^{2m} B_m}$$

rd man finden:

$$\frac{A_{(\mu - m)}}{q^{2(\mu - m - k)} A_{(\mu - m - k)}} = \frac{B_{(m+k)}}{q^{2m} B_m}.$$

Da aber die Gleichung erfüllt wird, was auch μ sei, so ka
n setzen:

$$\mu - m - k = m',$$

m' eine ganze von m unabhängige Zahl ist. Dies giebt:

$$\frac{A_{(m'+k)}}{q^{2m'} A_{m'}} = \frac{B_{(m+k)}}{q^{2m} B_m},$$

raus man erkennt, dass jedes Glied gleich einer Constanten
e unbekannten Funktionen A_m und B_m sind mithin 2 Auflösung
rselben Differenzengleichung:

$$\frac{z_{(m+k)}}{q^{2m} z_m} = \text{const.},$$

eren allgemeines Integral ist:

$$A_m = a_m \, q^{\frac{m^2}{k}}$$

$$B_m = b_m \, q^{\frac{m^2}{k}},$$

wo a_m und b_m die Bedingungen erfüllen:

$$a_{(m+k)} = a_m\,,$$
$$b_{(m+k)} = b_m\,.$$

Setzt man also:

$$\Phi(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_m \, q^{\frac{m^2}{k}} e^{2m\frac{i\pi x}{a}},$$

$$\Pi(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} b_m \, q^{\frac{m^2}{k}} e^{2m\frac{i\pi x}{a}},$$

so wird der Quotient $\frac{\Phi(x)}{\Pi(x)}$ der Ausdruck für ein
dische Funktion sein, welche durch unsere Analysis ge
handelt sich jetzt darum, die merkwürdigen Reihen, a
den Zähler und den Nenner gekommen sind, genauer
Was zunächst die Convergenz anbetrifft, so wird,
wir gethan haben, den Modul von q kleiner als
ganze Zahl k, welche sonst willkürlich bleibt, off
genommen werden müssen. Dies zugegeben, werd
Rede stehenden Reihen, da sie nach quadratischen
fortschreiten, für alle reellen und imaginären Wert
sehr rasch convergiren, und zwar so rasch, wie
Beispiele in der Analysis bisher vorgekommen ist.
zu sehen, wie sich die doppelte Periodicität des Qu
wollen wir z. B. im Zähler x + b für x setzen. M

n allgemeinen Gliede für m m—k setzen, weil der Index alle g
n Werthe von $-\infty$ bis $+\infty$ annimmt Indem man also $a_{(m-k)} =$
tzt, findet man:

$$\Phi(x+b) = \sum a_m \, q^{\frac{(m-k)^2}{k} + 2(m-k)} \, e^{2(m-k)\frac{i\pi x}{a}}$$

$$= \sum a_m \, q^{\frac{m^2}{k} - k} \, e^{2(m-k)\frac{i\pi x}{a}}$$

$$= q^{-k} \, e^{-2k\frac{i\pi x}{a}} \sum a_m \, q^{\frac{m^2}{k}} \, e^{2m\frac{i\pi x}{a}}$$

erart, dass die ursprüngliche Reihe Φ (x) sich als Faktor wied
ndet.

Diese Grundbeziehung bringen wir unter folgende Form:

$$\Phi(x+b) = \Phi(x) \, e^{-k\frac{i\pi}{a}(2x+b)}$$

nd in Rücksicht darauf, dass wir sie erhalten haben, ohne irge
e die willkürlichen Coefficienten a_m zu bestimmen, können
nzufügen:

$$\Pi(x+b) = \Pi(x) \, e^{-k\frac{i\pi}{a}(2x+b)}.$$

eraus zeigt sich auf's Klarste, wo die doppelte Periodicität d
uotienten der beiden Funktionen Φ (x) und Π (x) herrührt. Je
r beiden hat die Periode a, und wenn man x + b für x set
ommt nur eine beiden gemeinsame Exponentialgrösse als Fak
nzu, welcher durch die Division wieder verschwindet.*)

Man wird bald die wichtige Rolle erkennen, welche die gan
ahl k spielt. Durch sie werden in den Zähler und den Nenn
willkürliche Constanten eingeführt, zufolge der Bedingungen

$$a_{(m+k)} = a_m,$$

Vir müssen jedoch jetzt bemerken, dass es unmöglich ist, den B
ngungen:

$$\Phi(x + a) = \Phi(x),$$

$$\Phi(x + b) = \Phi(x)\, e^{-k\frac{i\pi}{a}(2x+b)}$$

urch andere eindeutige ganze Funktionen zu genügen, als durc
ie vorstehende Reihe. Setzt man nämlich unter dieser Annahme

$$\Phi(x) = \sum A_m\, e^{2m\frac{i\pi x}{a}}$$

der vielmehr

$$\Phi(x) = \sum a_m\, q^{\frac{m^2}{k}}\, e^{2m\frac{i\pi x}{a}}$$

n die erste Bedingung zu erfüllen, so wird, wenn man dies in d
Gleichung einsetzt und die Coefficienten derselben Exponentia
rösse mit einander vergleicht, $a_{(m+k)} = a_m$. Bevor wir weit
eben, wollen wir eine kleine Abschweifung machen, und darin einig
Vorte über eine ebenso merkwürdige als wichtige Verallgemeinerun
er obigen Reihe sagen.

II. Bemerkung über die Funktionen mehrerer Variablen m vielfacher Periodicität.

Eine Funktion $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ von n Variablen kann nicht alle
Bezug auf jede Variable für sich betrachtet, periodisch sein, so
ern auch in Bezug auf Alle zusammen, wenn sie eine Gleichun
on folgender Form erfüllt:

$$f(x_1 + a_1, x_2 + a_2 \ldots x_n + a_n) = f(x_1, x_2 \ldots x_n)$$

ngige Grössen sein können. Bildet man in der That mit n glei-
itigen passend gewählten Perioden:

$$\begin{array}{c} a_1, a_2 \ldots a_n, \\ b_1, b_2 \ldots b_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ g_1, g_2 \ldots g_n, \end{array}$$

e n linearen Funktionen:

$$\begin{array}{l} X_1 = a_1 x_1 + b_1 x_2 + \ldots + g^1 x_n, \\ X_2 = a_2 x_1 + b_2 x_2 + \ldots + g_2 x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_n = a_n x_1 + b_n x_2 + \ldots + g_n x_n, \end{array}$$

d setzt:

$$f(X_1, X_2 \ldots X_n) = F(x_1, x_2 \ldots x_n),$$

hat man eine transformirte Funktion, die in Bezug auf je
ariable periodisch ist, aber ausserdem n andere gleichzeitige Per
n besitzt, und in Bezug auf die letztern, zeigt sich in einfachs
eise die folgende Beziehung.

Bezeichnen wir sie mit:

$$\begin{array}{c} A_1, A_2 \ldots A_n, \\ B_1, B_2 \ldots B_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ G_1, G_2 \ldots G_n. \end{array}$$

Der Riemann'sche Satz besteht darin, dass die Glieder die
usammenstellung, welche symmetrisch in Bezug auf die Diagona
B... G... liegen, unter sich gleich sind, oder, was dasselbe

Die quadratische Form, von der wir
sei $= \varphi\,(x_1, x_2 \dots x_n)$, und setzen wir

$$\Phi(x_1, x_2 \dots x_n) = \sum a_{(m_1, m_2 \dots)}\, e^{2 i \pi\, (m_1\, x \dots}$$

wo das Zeichen Σ sich auf alle ganzen W
der n Indices $m_1, m_2 \dots m_n$ bezieht, un
$a_{(m_1, m_2 \dots m_n)}$ der Bedingung unterwor
Werth wieder annimmt, wenn man eine
ganze Zahl k vermehrt. Diese Funkti
in Bezug auf jede Variable für sich bet
die Grundeigenschaft, welche sie mit de
bindet. —

Seien $\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n$ n willkürliche g

$$\Phi\left(x_1 + \tfrac{1}{2}\frac{d\varphi}{d\alpha_1},\ x_2 + \tfrac{1}{2}\frac{d\varphi}{d\alpha_2} \dots\right.$$

$$= \Phi\,(x_1, x_2 \dots x_n)\, e^{-k i \pi\, [2\alpha_1\, x_1 \dots}$$

Da diese Beziehung die Constante $a_{(m_1,}$
wird eine andere Reihe $\Pi\,(x_1, x_2 \dots x_n)$,
bestimmt sind, in gleicher Weise geben:

$$\Pi\left(x_1 + \tfrac{1}{2}\frac{d\varphi}{d\alpha_1},\ x_2 + \tfrac{1}{2}\frac{d\varphi}{d\alpha_2} \dots\right.$$

$$= \Pi\,(x_1, x_2 \dots x_n)\, e^{-k i \pi\, [2\alpha_1\, x_1 \dots}$$

woraus folgt, dass der Quotient $\dfrac{\Phi\ (x_1,}{\Pi\ (x_1,}$
mit n Variablen und 2n Perioden darstel

Sei

$$p_1, p_2 \dots p_n,$$
$$q_1, q_2 \dots q_n,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$s_1, s_2 \dots s_n,$$

n System von n^2 willkürlichen Constanten, so ist es nothwend
d ausreichend, dass die Funktionen

$$f(x_1 + p_1, x_2 + p_2 \dots x_n + p_n),$$
$$f(x_1 + q_1, x_2 + q_2 \dots x_n + q_n),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$f(x_1 + s_1, x_2 + s_2 \dots x_n + s_n),$$

eich Null oder gleich unendlich gesetzt, nur eine bestimmte u
ndliche Anzahl von Auflösungen zulassen, welche man nicht m
ücksicht auf die Perioden, die eine auf die andere reduciren ka

Die erste Kenntniss von diesen Reihen verdankt man Goe
nd Rosenhaim, sie haben dieselben für den Fall, dass nur 2 Variab
orhanden sind, angewandt, um die umgekehrten Funktionen der
grale von Quadratwurzeln zu finden, welche Polynome fünften u
chsten Grades enthalten. Weierstrass, indem er weit über die v
eiden ausgezeichneten Mathematikern erreichten Ergebnisse hina
ng, löste mit Hülfe derselben Reihen das Problem der Umkehru
r Integrale von Quadratwurzeln aus Polynomen von beliebig
rade in seiner ganzen Allgemeinheit. Nach ihm gelangte auf ein
nz verschiedenen Wege Riemann zu demselben Resultate, und
m noch viel weitern Felde der Transcendenten mit beliebigen al
raischen Differenzialen begegneten sich diese beiden grossen Mat
atiker abermals, indem sie gleichzeitig das so allgemeine Probl
r Umkehrung von Integralen beliebiger algebraischer Funktio
sten, eine der schönsten und wichtigsten Untersuchungen, die

Fall, mit dem wir uns nun ausschliesslich
jedoch der einzige, wo eine Zerlegung in I
im allgemeinern Falle, wo die Reihen 2 ode
halten, in keiner Weise geschieht. Die Zu
von Ausdrücken auf einander macht sich g
aus den Beziehungen, die wir oben gegebe
mals zusammenstellen wollen:

$$\theta(x+2K) = \theta(x). \qquad \theta(x+2iK') =$$

$$H(x+2K) = -H(x), \qquad H(x+2iK') =$$

$$\theta_1(x+2K) = \theta_1(x), \qquad \theta_1(x+2iK')$$

$$H_1(x+2K) = -H_1(x), \qquad H_1(x+2iK')$$

hieraus folgt unmittelbar:

$$\theta(x+4K) = \theta(x), \qquad H(x+$$

Die Funktionen θ (x) und H (x) erfüllen be

$$\Phi(x+4K) = \Phi(x),$$

$$\Phi(x+2iK') = -\Phi(x)\,e^{-}$$

und die Funktionen θ_1 (x) H_1 (x) aus ähn
genden:

$$\Phi(x+4K) = \Phi(x),$$

$$\Phi(x+2iK') = \Phi(x)\,e^{-\frac{i\pi}{K}(}$$

Dies sind aber dieselben Bedingungen
Ausdruck genügt:

$$\Phi(x) = \sum a_m\, q^{\frac{m^2}{k}}\, e^{2m\frac{i\pi}{2}}$$

$$\sum a_m q^{\frac{m^2}{2}} e^{2m\frac{i\pi x}{a}} = a_0 \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m q^{m^2} e^{m\frac{i\pi x}{K}}$$

$$+ a_1 \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m q^{\frac{(2m+1)^2}{4}} e^{(2m+1)\frac{i\pi x}{2K}}$$

...ese Bestimmung folgt übrigens unmittelbar aus den Bedingung...

$$\theta_1(x+2K) = \theta_1(x),$$
$$H_1(x+2K) = -H_1(x).$$

In der That sieht man, dass die mit a_0 und a_1 multiplicir... ...eihen, bezüglich die erstere und die zweite Bedingung erfüll... ...rart, dass man hat:

$$\alpha\,\theta_1(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m q^{m^2} e^{2m\frac{i\pi x}{K}},$$

$$\beta\,H_1(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_m q^{\left(\frac{2m+1}{4}\right)^2} e^{(2m+1)\frac{i\pi x}{2K}},$$

...o α und β Constanten sind. Ersetzt man die Exponentialgröss... ...rch trigonometrische, und die Variable x durch $\frac{2Kx}{\pi}$, so erh... ...an folgende merkwürdige Entwickelungen:

$$\theta_1\left(\frac{2Kx}{\pi}\right) = 1 + 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x + 2q^9\cos 6x + \dots$$

$$H_1\left(\frac{2Kx}{\pi}\right) = 2\sqrt[4]{q}\cos x + 2\sqrt[4]{q^9}\cos 3x + 2\sqrt[4]{q^{25}}\cos 5x + \dots$$

Indem man hier x durch $x + \frac{\pi}{2}$ ersetzt, erhält man noch:

gleich sind. — Dies sind die Identitätsbeziehu
endlichen Reihen und Produkten, sie sind
und können auch auf verschiedenen anderen
den. Jakobi, ihr erster Entdecker, und Cauch
ganz elementare angegeben, am meisten ist di
der von Cauchy herrührt.

Wir betrachten mit diesem berühmten M
unendliche Polynom:

$$\varphi(z) = (1+z)(1+qz)(1+q^2z)\ldots$$
$$= 1+A_1z+A_2z^2+\ldots+A$$

Die identische Beziehung:

$$(1+z)\,\varphi(qz) = (1+q^nz)$$

ergiebt folgende Reihe von Gleichungen:

$$A_1(1-q) = 1-q^n,$$
$$A_2(1-q^2) = A_1(q-q$$
$$A_3(1-q^3) = A_2(q^2-q$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

woraus sich unmittelbar ergiebt:

$$A_i = q^{\frac{i(i-1)}{2}}\frac{(1-q^n)(1-q^{n-1})\ldots(}{(1-q)(1-q^2)\ldots(}$$

Verstehen wir jetzt für einen Augenblick unte

aus $\varphi(z)$ wird, wenn man q^2 für q setzt, 2n fü

Setzt man nun:

$$\Phi(z) = 1+a_1z+a_2z^2+\ldots+$$

$$\Phi(z) = a_n z^n \left[1 + \frac{a_{(n+1)}}{a_n}(z + z^{-1}) + \frac{a_{(n+2)}}{a_n}(z^2 + z^{-2}) + \ldots\right]$$

ommen wir jedoch auf den Werth von $\Phi(z)$ unter der Produktfo rück, und bemerken wir zunächst, dass wenn man q durch q^2, u durch $2n$ in $\varphi(z)$ ersetzt, sich ergiebt:

$$\begin{aligned}(1+z)(1+q^2z)(1+q^4z)\ldots(1+q^{4n-2}z) \\ = [(1+z)(1+q^2z)\ldots(1+q^{2n-2}z)] \\ [(1+q^{2n}z)(1+q^{2n+2}z)(1+q^{2n+4}z)\ldots(1+q^{4n-2}z\end{aligned}$$

dass, wenn man schliesslich $\frac{z}{q^{2n-1}}$ für z setzt, erhalten wird:

$$\begin{aligned}\Phi(z) = \left[\left(1+\frac{z}{q^{2n-1}}\right)\left(1+\frac{z}{q^{2n-3}}\right)\ldots\left(1+\frac{z}{q}\right)\right] \\ \times [(1+qz)(1+q^3z)\ldots(1+q^{2n-1}z)].\end{aligned}$$

e Faktoren des ersten Produkts kann man noch anders schreib ist nämlich:

$$1 + \frac{z}{q} = \frac{z}{q}\left(1 + \frac{q}{z}\right),$$

$$1 + \frac{z}{q^3} = \frac{z}{q^3}\left(1 + \frac{q^3}{z}\right),$$

$$1 + \frac{z}{q^5} = \frac{z}{q^5}\left(1 + \frac{q^5}{z}\right),$$

. . . .

ies giebt für $\Phi(z)$ den neuen Werth:

$$\begin{aligned}\Phi(z) = \frac{z^n}{q^{n^2}}\left(1+\frac{q}{z}\right)\left(1+\frac{q^3}{z}\right)\ldots\left(1+\frac{q^{2n-1}}{z}\right) \\ (1+qz)(1+q^3z)\ldots(1+q^{2n-1}z).\end{aligned}$$

ies ist die schliessliche Form des Produktes von Faktoren, wo ir die Entwickelung nach Potenzen von z bereits haben. Sei,

$$\mathfrak{A}_n = \frac{(1-q^{4n})\,(1-q^{4n-2})\,\ldots\,(1}{(1-q^2)\,(1-q^4)\,\ldots\,(1-}$$

$$a_i = \frac{(1-q^{2n})\,(1-q^{2n-2})\,\ldots\,(1}{(1-q^{2n+2})\,(1-q^{2n+4})\,\ldots\,(}$$

Die algebraische Identität, die wir er
dann die Form an:

$$\left(1+\frac{q}{z}\right)\left(1+\frac{q^3}{z}\right)\ldots\left(1+\frac{q^{2n-1}}{z}\right.$$

$$(1+qz)\,(1+q^3z)\ldots(1+q^{2n-1}z$$

$$=\mathfrak{A}_n[1+a_1q(z+z^{-1})+a_2q^4(z^2+z^{-2})+$$

und, wenn man $z=e^{2ix}$ setzt:

$$(1+2q\cos 2x+q^2)(1+2q^3\cos 2x+q^6)\ldots(1$$

$$=\mathfrak{A}_n(1+2a_1q\cos 2x+2a_2q^4\cos 4x+.$$

für unendliches n aber hat man:

$$\mathfrak{A}_n = \frac{1}{(1-q^2)\,(1-q^4)\,(1-q^6)\,(}$$

$$a_i = 1,$$

und die algebraische Identität giebt uns di
der Transcendente θ_1 (x), welche in der Rel

$$(1+2q\cos 2x+q^2)\,(1+2q^3\cos 2x+q^6)\,(1-$$

$$=\frac{1+2q\cos x+2q^4\cos 4x+2q^9}{(1-q^2)\,(1-q^4)\,(1-q^6}$$

Dies Resultat setzt uns in den Stand, die e
wir von den 4 Funktionen Θ (x), H (x), Θ_1 (x)
indem wir sie durch ein Produkt von Faktor
mit einem bis jetzt willkürlichen Coefficiente
ständig zu präcisiren. Wir setzen nämlich

;iebt sich:

$$H_1\left(\frac{2Kx}{\pi}\right) = 2\sqrt[4]{q}\cos x + 2\sqrt[4]{q^9}\cos 3x + 2\sqrt[4]{q^{25}}\cos 5x + \ldots.$$

Und diese beiden Formeln geben, wenn man $x + \frac{\pi}{2}$ für x set:

$$\theta\left(\frac{2Kx}{\pi}\right) = 1 - 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x - 2q^9\cos 6x + \ldots$$

$$H\left(\frac{2Kx}{\pi}\right) = 2\sqrt[4]{q}\sin x - 2\sqrt[4]{q^9}\sin 3x + 2\sqrt[4]{q^{25}}\sin 5x - \ldots.$$

Dies sind die Transcendenten, deren Eigenschaften wir er
:keln wollen in der Form von unendlichen Produkten und Reihe

Ueber die beiden Hauptformen, welche unter unendli el andern die Functionen Θ, H u. s. w. annehmen könne

Dieser Punkt berührt den schönsten Theil der Theorie c iptischen Funktionen, die Theorie der Transformation, welchen ben, uns die Grenzen dieses Abrisses nicht erlauben. Aber u hängig von ihrem eigentlichen Interesse werden uns die Forme lche wir sogleich entwickeln wollen, und welche denjenigen sp llen Fall der Transformation der Funktionen θ H u. s. w. geben, n die Grössen K und iK' mit einander vertauscht, später une hrlich sein, und wir dürfen sie um so weniger übergehen, als, v n sehen wird, sie auf die leichteste Art entwickelt werden könn ebrigens ist dies der Weg, der zu der analogen und allgemein ntersuchung führt, wo man K und iK' durch mK+m'iK', nK+n'

$$\eta\ (x) = e^{\frac{\pi x^2}{4KK'}}$$

$$\eta_1 (x) = e^{\frac{\pi x^2}{4KK'}}$$

Man sieht unmittelbar, dass den Grund
$\theta\, H\, \theta_1\, H_1$ nämlich:

a) $$\theta\ (x + K) = \theta_1$$
$$H (x + K) = H_1$$
$$\theta_1 (x + K) = \theta\ ($$
$$H_1 (x + K) = -$$

b) $$\theta\ (x + iK') = i\, H\, (x$$

$$H (x + iK') = i\, \theta\ (x$$

$$\theta_1 (x + iK') = H_1\ (x)$$

$$H_1 (x + iK') = \theta_1\ (x)$$

Die folgenden entsprechen:

c) $$\vartheta\ (x + iK') = i$$
$$\eta\ (x + iK') = i$$
$$\vartheta_1 (x + iK') = \eta_1$$
$$\eta_1 (x + iK') = \vartheta_1$$

d) $$\vartheta\ (x + K) = \vartheta_1 (x)\, e$$

$$\eta\ (x + K) = \eta_1\ (x)\, e$$

$$\vartheta_1 (x + K) = \vartheta\ (x)\ e$$

ziehungen mit dem ersten völlig übereinstimmt, wenn man dar
etzt einerseits:

$$K \text{ und } iK'$$

züglich durch:

$$iK' \text{ und } -K$$

d andererseits

$$\vartheta(x), \quad \eta(x), \quad \vartheta_1(x), \quad \eta_1(x)$$

rch:

$$H_1(x), \quad \frac{1}{i} H(x), \quad \theta_1(x), \quad \theta(x).$$

Die neuen Funktionen, die wir eingeführt haben, sind also a
e alten zurückgeführt; bemerkt man noch, dass durch die Aenderu
n K in iK' und von iK' in $-$ K, die Grösse $q = e^{-\pi\frac{K'}{K}}$
$= e^{-\pi\frac{K}{K'}}$ übergeht, so erhält man die folgenden Ausdrücke, w
M und N zwei constante Factoren bezeichnen:

$$) \; \vartheta\left(\frac{2iK'x}{\pi}\right) = M 2\sqrt[4]{q_0} \cos x (1 + 2q_0^2 \cos 2x + q_0^4)$$
$$(1 + 2q_0^4 \cos 2x + q_0^8)(1 + 2q_0^6 \cos 2x + q_0^{12}) \dots$$

$$i\eta\left(\frac{2iK'x}{\pi}\right) = M 2\sqrt[4]{q_0} \sin x (1 - 2q_0^2 \cos 2x + q_0^4)$$
$$(1 - 2q_0^4 \cos 2x + q_0^8)(1 - 2q_0^6 \cos 2x + q_0^{12}) \dots$$

$$\vartheta_1\left(2i\frac{K'x}{\pi}\right) = M(1 + 2q_0 \cos 2x + q_0^2)(1 + 2q_0^3 \cos 2x + q_0^6)$$
$$(1 + 2q_0^5 \cos 2x + q_0^{10}) \dots$$

$$\eta_1\left(2i\frac{K'x}{\pi}\right) = M(1 - 2q_0 \cos 2x + q_0^2)(1 - 2q_0^3 \cos 2x + q_0^6)$$
$$(1 - 2q_0^5 \cos 2x + q_0^{10}) \dots$$

dass man statt $\frac{2Kx}{\pi}$, das imaginäre Arg

man K und K' reell, so hat man den
reeller Form, und kann ihm immer folg
oder mit $\sqrt{-1}$ multiplicirt sein. Wir
wendung.

E. Grundeigenschaften der Funk finition von sin am (x), cos

Im Vorhergehenden haben wir die

$$\Phi (x) = \sum a_m$$

für den Fall, wo $k = 2$ war, angewand

$$a = 4\,K,$$

$$b = 2\,i\,K'.$$

Jetzt behalten wir diese beiden Werthe
mithin:

$$\Phi (x) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}_{m}\, a_m$$

unter der Bedingung, dass

$$a_{(m+k)} = a$$

$$\Phi(x) = a_0 \sum q^{2n^2} e^{2n\frac{i\pi x}{K}}$$
$$+ a_1 \sum q^{\frac{(4n+1)^2}{8}} e^{(4n+1)\frac{i\pi x}{2K}}$$
$$+ a_2 \sum q^{\frac{(2n+1)^2}{2}} e^{(2n+1)\frac{i\pi x}{K}}$$
$$+ a_3 \sum q^{\frac{(4n+3)^2}{8}} e^{(4n+3)\frac{i\pi x}{2K}},$$

der der Abkürzung wegen:

$$\Phi(x) = a_0 \Phi_0(x) + a_1 \Phi_1(x) + a_2 \Phi_2(x) + a_3 \Phi_3(x).$$

Hieraus ergiebt sich, dass, wenn

$$\Phi(x + 2K) = \Phi(x)$$

ist, die Auflösung sich darstellt durch

$$\Phi(x) = a_0 \Phi_0(x) + a_2 \Phi_2(x)$$

und nur zwei willkürliche Constanten enthält. Setzt man eben

$$\Phi(x + 2K) = -\Phi(x),$$

so hat man mit ebenfalls zwei willkürlichen Constanten:

$$\Phi(x) = a_1 \Phi_1(x) + a_3 \Phi_3(x).$$

Somit haben wir die allgemeinste Art, den zwei Systemen von Bedingungen zu genügen:

$$\text{I.} \quad \Phi(x + 2K) = \Phi(x),$$
$$\Phi(x + 2iK') = \Phi(x)\, e^{-\frac{2i\pi}{K}(x+iK')};$$

$$\text{II.} \quad \Phi(x + 2K) = -\Phi(x),$$
$$\Phi(x + 2iK') = \Phi(x)\, e^{-\frac{2i\pi}{K}(x+iK')}.$$

$$\theta_1^2(x) = a\,\Phi_0(x) -$$
$$H^2(x) = c\,\Phi_0(x) -$$

Wenn man zweitens Glied für Glied,
die zwei Letzten derselben Gleichung
auf die Form des zweiten Systems, ma

$$\theta(x)\,H(x) = A\,\Phi_1(x$$

wo A und B neue Constanten bezeichn
noch, wenn man $x + K$ für x setzt:

$$\theta_1(x)\,H_1(x) = iA\,\Phi_1($$

Ausser verschiedenen anderen Folgeru
die algebraischen und differenziellen
Funktionen.

I. Algebraische Beziehungen.

Compleme

Aus den Ausdrücken für $\theta^2\,H^2\,\theta$
erhält man offenbar zwei lineare Glei
draten.

Die eine nimmt die Form an:

$$\theta^2(x) = \alpha\,H^2(x) -$$

α und α' sind zu bestimmende Const
wir $x = 0$ und $x = K$, nach den Form
$H_1(K) = 0$, also:

$$\alpha = \frac{\theta^2(K}{H^2(K}$$

$$\alpha' = \frac{\theta^2(0}{}$$

nd da zufolge der Beziehung

$$H\,(x + K) = H_1\,(x)$$

ch ergiebt:

$$H\,(K) = H_1\,(0),$$

hat man

$$\alpha = \frac{1}{k}, \quad \alpha' = \frac{k'}{k},$$

nd also:

$$k\,\theta^2(x) = H^2(x) + k'\,H_1^2(x).$$

us dieser ersten Relation ergiebt sich die zweite, wenn man setzt $x + iK'$. Wendet man zu dem Ende die Formeln eite 19 an, so erhält man, indem man den Exponentialfaktor w sst:

$$k\,H^2(x) = -\,\theta^2(x) + k'\,\theta_1^2(x)$$

er:

$$\theta^2(x) = k\,H^2(x) + k'\,\theta_1^2(x).$$

ese beiden Gleichungen stellen übrigens alle möglichen al aischen Beziehungen zwischen unsern vier Funktionen dar, hren zur Kenntniss der Grössen, welche wir mit k und k' ichnet haben, und deren Quadratwurzeln sich auf folgende We rch Reihen ausdrücken lassen:

$$\sqrt{k} = \frac{H(K)}{\theta\,(K)} = \frac{2\sqrt[4]{q} + 2\sqrt[4]{q^9} + 2\sqrt[4]{q^{25}} + 2\sqrt[4]{q^{49}} + \ldots}{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{16} + \ldots}$$

$$\sqrt{k'} = \frac{\theta\,(0)}{\theta\,(K)} = \frac{1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + 2q^{16} - \ldots}{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{16} + \ldots}$$

e erste k wird der Modul von $\theta\,(x)$, $H(x)$, $\theta_1\,(x)$, $H_1\,(x)$ genan e zweite k' das Complement des Modul. Wenn man sie als w

den sind, geöffnet. Die Grenzen dies
ein Feld, welches schon mit so schöne
zu treten, aber was wir hier in Bez
u. s. w. sagen werden, wird hinreichend
die besonderen Abhandlungen zu lesen
gewidmet sind. In der That muss ma
Bezug auf x und ω untersuchen, um
Grössen, die allein von ω abhängig sind
Standpunkte der analytischen Kenntn
möglich zu sein, zu allen ihren Eigen
man nur von ihrer Definition als Qu
Reihen ausgeht.*) — Bis zu einem ge
Schwierigkeit begreifen, wenn man b
so weit Funktionen von ω sind, als ma
und von der Form

$$\omega = \alpha +$$

annimmt, wo β wesentlich versch
sitiv ist. Es sind dies in Wahrheit
sich vielen und grade den am häufi
entziehen. So giebt es für k und k'
tenzen von ω, und setzt man $\omega = \omega_0$
anwenden zu können, so bieten sich
— die Grössen k und k' können durch
Gleichung für unendlich viel Werthe
man hat:

$$\omega_0 = \frac{A + \sqrt{}}{C}$$

wo A B C ganze Zahlen sind, und B w
die Anwendung der Anfangswerthe, fü

*) Poisson und Cauchy sind auf zw
folgenden Gleichung gekommen:

r Reihen eine gewöhnliche Irrationalzahl giebt, so sind die folge n Glieder nothwendig Transcendenten. So hat man z. B. f $, = i$, $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $k' = \frac{1}{\sqrt{2}}$, und setzt man $\omega = i + h$, so kommt n Coefficienten der Entwickelung von k und k' nach wachsend otenzen von h das Integral $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$ vor. Man sieht hieraus, hr sich diese Reihen von denjenigen unterscheiden, welche die g öhnlichen Transcendenten definiren, und wo die Coefficienten imn mmensurabel sind. Aber da wir diesen Gegenstand nicht wei rfolgen können, kommen wir auf unser Thema zurück, und woll e Benennungen: Modul und sein Complement, welche wir k u gegeben haben, rechtfertigen, indem wir die Gleichung

$$k^2 + k'^2 = 1$$

eweisen. — Wir haben folgende Beziehungen gefunden:

$$k\, \theta^2(x) = H^2(x) + k'\, H_1^2(x),$$

$$\theta^2(x) = k\, H^2(x) + k'\, \theta_1^2(x).$$

Setzen wir in der zweiten $x = K$, nachdem beide Glieder du $^2(x)$ dividirt sind, und bemerken, dass wegen

$$\theta_1(x + K) - \theta(x)$$

ch ergiebt:

$$\theta_1(K) = -\theta(0),$$

hat man grade die Gleichung, welche zu beweisen war. — Hier lgt eine Beziehung zwischen den unendlichen Reihen:

$$(2\sqrt[4]{q} + 2\sqrt[4]{q^9} + 2\sqrt[4]{q^{25}} + 2\sqrt[4]{q^{49}} + \ldots)^4$$
$$+ (1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + 2q^{16} - \ldots)^4$$

$$\sqrt[4]{k} = \sqrt{2}\,\sqrt[8]{q}\,\frac{1-q^4-q^8+\ldots}{1+q\;-q^2-\ldots}$$

$$= \sqrt{2}\,\sqrt[8]{q}\,\frac{1+q^2+q^6+\ldots}{1+q\;+q^3+\ldots}$$

$$= \sqrt{2}\,\sqrt[8]{q}\,\frac{1-q-q^3+\ldots}{1-2q^2+2q^8-\ldots}$$

$$= \sqrt{2}\,\sqrt[8]{q}.\,\frac{1+q+q^3+\ldots}{1+2q+2q^4+\ldots}$$

Die Gesetze dieser Reihen sind durch ... ben, wo das Zeichen $\sum$ sich auf alle W... $-\infty$ bis $+\infty$ ausdehnt:

$$\sqrt[4]{k} = \sqrt{2}\,\sqrt[8]{q}\,\frac{\sum (-1)^n q\ldots}{\sum (-1)^{\frac{n^2\ldots}{2}}\ldots}$$

$$= \sqrt{2}\,\sqrt[8]{q}\,\frac{\sum q^{4n^2+2n}\ldots}{\sum q^{2n^2+n}\ldots}$$

$$= \sqrt{2}\,\sqrt[8]{q}\,\frac{\sum (-1)^n q\ldots}{\sum (-1)^n q\ldots}$$

$$= \sqrt{2}\,\sqrt[8]{q}\,\frac{\sum q^{2n^2+n}}{\sum q^{n^2}}.$$

Für das Complement des Moduls aber ...

$$\sqrt[4]{k'} = \frac{1-q-q^2+q^5+q^7\ldots}{\ldots}$$

$$\sqrt[4]{k'} = \frac{\sum (-1)^n \, q^{\frac{3n^2+n}{2}}}{\sum (-1)^{\frac{n^2+n}{2}} \, q^{\frac{3n^2+n}{2}}} \qquad 1)$$

$$= \frac{\sum (-1)^n \, q^{2n^2+n}}{\sum q^{2n^2+n}} \qquad 2)$$

$$= \frac{\sum (-1)^n \, q^{2n^2}}{\sum (-1)^n \, q^{n^2}} \qquad 3)$$

$$= \frac{\sum (-1)^n \, q^{2n^2}}{\sum q^{n^2}} \qquad 4)$$

Die Grösse $\sqrt[4]{k\,k'}$, welche ebenfalls eine wichtige Rolle spie[lt, wi]rd durch folgende Entwickelung, die den Vorigen ähnlich ist, g[ege]ben:

$$\sqrt[4]{kk'} = \sqrt{2} \; \sqrt[8]{q} \; \frac{\sum (-1)^n \, q^{2n^2+n}}{\sum q^{n^2}}.$$

II. Definition von sin am (x), cos am (x), Δ am (x) . . . Differenzialgleichungen.

Wir setzen:

$$u = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{H(x)}{\theta(x)},$$

Die erste führt darauf, u durch einen Sin
auszudrücken. So hat es Jakobi gethan
zeichnungen dieses berühmten Mathematik

$$u = \sin \operatorname{am} (x),$$

$$v = \cos \operatorname{am} (x),$$

$$w = \Delta \operatorname{am} (x).$$

Der Sinus, der Cosinus und die Funktion
Variable x sind also die drei doppelt peri
Dies führt uns auf den in gewisser Bezie
der Theorie, dessen Zweck es ist, sie durc
gen auszudrücken. — Zu dem Ende betr
von u, nämlich:

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{H'(x)\, \theta(x) - H(x)}{\theta^2(x)}$$

Diese Ableitung hat wie die Funktion se
ändert nur das Zeichen, wenn man x in
der Zähler den Werth hat:

$$\Phi(x) = \theta^2(x) \frac{d}{d}$$

so erhält man unmittelbar aus den Bezieh

$$\theta^2(x + 2K) = \theta^2(x)$$

$$\theta^2(x + 2iK') = \theta^2(x)$$

welche der Nenner erfüllt, die folgende:

$$\Phi(x + 2K) = -\Phi(x$$

$$\Phi(x + 2iK') = \Phi(x)\, e$$

Aber nach dem oben Gesagten (Seite 37

$$\Phi(x) = a_1 \Phi_1(x) + a_3 \Phi_3(x) = m\, \theta(x)$$

$$\frac{m_1 \sqrt{k}}{k'} = \mu,$$

kommt:

$$\frac{du}{dx} = \mu v w = \mu \sqrt{(1-u^2)(1-k^2 u^2)}.$$

a die Funktion u mit x verschwindet, so stellt die Constante μ d
renze des Verhältnisses $\frac{\sin\ am\ (x)}{x}$ für $x = 0$ dar, eine Gren
e im Allgemeinen von den Grössen K und K' abhängt. Wir hab
dessen schon früher bemerkt, dass der Ausdruck für die Funktion
(x), $H(x)$ sich nicht ändert, wenn man x, K, K' durch $\frac{x}{\mu}$, $\frac{K}{\mu}$,
setzt, und dass man diesen Umstand benutzen kann, um auf e
estimmte Art die Perioden zu spezialisiren. Wir werden sona
ne Beziehung einführen, deren Zweck es ist, die Grenze $\frac{\sin\ am}{x}$
eich Eins zu machen, um in diesem wesentlichen Punkt den Si
er Amplitude mit dem trigonometrischen Sinus in Uebereinstimmu
ı bringen. Man hat:

$$\frac{\sin\ am\ (x)}{x}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{2\sqrt[4]{q}\,\frac{1}{x}\sin\frac{\pi x}{2K}\left(1-2q^2\cos\frac{\pi x}{K}+q^4\right)\left(1-2q^4\cos\frac{\pi x}{K}+q^8\right)\cdots}{\left(1-2q\cos\frac{\pi x}{K}+q^2\right)\left(1-2q^3\cos\frac{\pi x}{K}+q^6\right)\cdots}$$

etzen wir für $x = 0$

$$1 = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{\pi}{K} \frac{\sqrt[4]{q}\,(1-q^2)^2(1-q^4)^2(1-q^6)^2\cdots}{(1-q)^2(1-q^3)^2(1-q^5)^2\cdots}$$

stellen wollen. Die andern ergeben sich d
Gleichungen:

$$u^2 + v^2 = 1,$$

$$k^2 u^2 + w^2 = 1,$$

und sind

$$\frac{dv}{dx} = - uw,$$

$$\frac{dw}{dx} = - k^2 uv.$$

Allgemeiner hat man:

$$\frac{d^{2n+1} u}{dx^{2n+1}} = (a_0 + a_1 u^2 + a_2 u^4 + \ldots + a$$

$$\frac{d^{2n} u}{dx^{2n}} = (A_0 + A_1 u^2 + A_2 u^4 + \ldots +$$

Die Coefficienten sind ganze Funktionen von k^2
eine Entwickelung ab, welche zwischen den Gr
der Variablen stattfindet, und wo zu setzen ist:

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(k + \frac{1}{k}\right),$$

$$u = x - 2k\alpha \frac{x^3}{1.2.3} + 4k^2(\alpha^2 + 3)\frac{x^5}{1.2.3.4.5}$$

$$- 8k^3(\alpha^3 + 33\alpha)\frac{x^7}{1.2\ldots7} + 16k^4(\alpha^4 + 306x^$$

$$- 32k^5(\alpha^5 + 2746\alpha^3 + 8289\alpha)\frac{x^{11}}{1.2\ldots11} + \ldots$$

Ebenso ergiebt sich:

Gudermann hat die Bemerkung gemacht, dass man bis
rössen fünfter Ordnung setzen kann:

$$u = \frac{\sin\,(x\sqrt{1+k^2})}{\sqrt{1+k^2}}$$

ıd

$$v = \cos x, \quad w = \cos kx,$$

dem man nur x^4 vernachlässigt, was man leicht durch Entwickelu
ıschen kann. — Man hat nun eine neue und vollständige Definit
r drei doppelt periodischen Funktionen, indem man mit den Di
nzialgleichungen die Anfangswerthe $u = 0$, $v = 1$, $w = 1$ für $x =$
rbindet. Im Besondern ist die Funktion sin am (x) bestim
ırch die Gleichung:

$$x = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)\,(1-k^2u^2)}}$$

ıd dies Integral oder vielmehr das allgemeinere

$$\int \frac{F\,(u)\,du}{\sqrt{(1-u^2)\,(1-k^2u^2)}},$$

› F (u) eine rationale Funktion ist, hat durch seine Untersuchu
ın Weg geöffnet, auf dem man zu den elliptischen Funktionen
ıngt ist. Hieraus ersieht man den Ursprung des Ausdrucks: „u
ekehrte Funktionen", dessen wir uns öfters bedient haben, da u
ıngekehrte Funktion des Integrals ist, welches zum Werth x h
ıd man kann sich denken, welche lange Kette von Gedanken u
elche Anstrengungen dazu gehörten, um von hier aus zur Kenntn
er doppelt periodischen Funktionen und zu den Reihen, von de
r ausgegangen sind, zu gelangen. Aber diese lange Arbeit ist
e Wissenschaft fruchtbar gewesen. Denn in Folge dieser Unt
chungen haben wir erst mehrere durchaus fundamentale analytis

umgekehrten Funktion die Periodicität verleiht.
Abhandlung über die zwischen imaginären
Integrale, die wesentlichen Grundzüge diese
suchung gegeben. Sie ist vollständig durch
lichen Arbeit, betitelt: Untersuchungen über di
tionen, (Liouville'sches Journal, Jahrgang 185
auf welche wir den Leser verweisen. Noch
steht in dem vollständigen und tieferen Sinne,
der Analysis mit dem Ausdrucke: Funktion
unter den verschiedenen Arten der Abhäng
wesentliche Unterschiede erkennt und chara
Wichtigkeit dieser Unterscheidungen haben e
suchungen gezeigt, zu denen die Theorie der
Anlass gegeben hat. So sind die Untersuchun
Zweck es ist, bloss aus der Definition einer Fu
eine Differenzialgleichung gegeben ist, zu erke
oder nicht ist, und im ersteren Falle, ob sie
ist. Die durch ihre grosse Allgemeinheit sch
auf diesem Wege gefunden sind, verdanken
Riemann**).

III. Von den Grössen K un

Indem wir die Perioden derart spezialisirte

kleines x die Grenze des Verhältnisses $\frac{\sin \text{am}}{x}$

wurde, gelangten wir zu dem Ausdruck:

$$\frac{\sqrt{k}\,K}{\pi} = \sqrt[4]{q}\left[\frac{(1-q^2)(1-q^4)(1-}{(1-q)(1-q^3)(1-}\right.$$

ss, wenn man $x = K$, und mithin $\sin \operatorname{am}(K) = 1$*) in den A
uck von $\sin \operatorname{am}(x)$ durch ein unendliches Produkt setzt, m
hält:

$$\sqrt{k} = 2\sqrt[4]{q}\left[\frac{(1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)\ldots}{(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\ldots}\right]^2.$$

vidirt man beide Gleichungen Glied für Glied, und zieht
uadratwurzel aus, so kommt:

$$\sqrt{\frac{2K}{\pi}} = \left[\frac{(1-q^2)(1-q^1)(1-q^6)\ldots}{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\ldots}\right]\left[\frac{(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\ldots}{(1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)\ldots}\right.$$

n Ausdruck, der auf bemerkenswerthe Art vereinfacht werden ka
enden wir zu dem Ende die Euler'sche Gleichung an:

$$(1+q)(1+q^2)(1+q^3)\ldots = \frac{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\ldots}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\ldots}$$
$$= \frac{1}{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\ldots},$$

hat man:

$$\frac{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\ldots}{(1-q)(1-q^1)(1-q^5)\ldots} = (1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\ldots \times (1+q)(1+q^2)(1+q^3)\ldots,$$

d da man hat:

$$(1+q)(1+q^2)(1+q^3)\ldots = (1+q)(1+q^3)(1+q^5)\ldots \times (1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)\ldots,$$

sieht man, dass in dem Werthe von $\sqrt{\frac{2K}{\pi}}$ alle Nenner verschw
en, er nimmt die Form an:

$$\sqrt{\frac{2K}{\pi}} = [(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\ldots][(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\ldots$$

etzt man also in der oben bewiesenen Formel:

$x = 0$. so ergiebt sich:

$$\theta_1(0) = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \ldots = (1 - c$$
$$[(1+q$$

und hieraus folgt ein Resultat, das in der
Funktionen von hoher Wichtigkeit ist:

$$\sqrt{\frac{2K}{\pi}} = \theta_1(0) = 1 + 2q + 2q^4$$

Mit Rücksicht auf die Gleichungen

$$\sqrt{k} = \frac{H(K)}{\theta(K)} = \frac{H_1(0)}{\theta_1(0)}$$

$$\sqrt{k'} = \frac{\theta(0)}{\theta_1(0)}$$

leitet man hieraus die beiden andern ab:

$$\sqrt{\frac{2kK}{\pi}} = H_1(0) = 2\sqrt[4]{q} + 2\sqrt[4]{q^9} + 2\sqrt[4]{}$$

$$\sqrt{\frac{2k'K}{\pi}} = \theta(0) = 1 - 2q + 2q^4 - 2q$$

Nur die Grösse K giebt Beziehungen von d

K', die in andrer Weise in dem Ausdruck
scheint ähnlicher Reihenentwickelung nicht f
drückt man in ähnlicher Weise mit Hülfe de
bestimmte Integrale aus:

$$K = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}, \quad K' = \int_0^1$$

wie wir beweisen werden.

Schon oben zeigten wir, dass sin am

olglich hat sin am (x) $= \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{H(x)}{\theta(x)}$ für $x = K + iK'$ zum Werthe
a nun

$$x = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}},$$

schliesst man, dass:

$$K = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1\ \ k^2u^2)}},$$

$$K + iK' = \int_0^{\frac{1}{k}} \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}},$$

d folglich, indem man Glied für Glied subtrahirt:

$$iK' = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}.$$

etzt man aber

$$u = \frac{1}{\sqrt{1-k'^2v^2}},$$

verwandelt sich das letzte Integral in:

$$i\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-v^2)(1-k'v^2)}},$$

as das angezeigte Resultat giebt.

Aber was wir eben gesagt haben, lässt doch eine empfindlic
icke. In Wahrheit sind wir auf einen der Punkte in der Theo
r elliptischen Funktionen gerathen, welche neue Untersuchung
fordern, um in wünschenswerth erschöpfender Weise behandelt

u im Integrale auf einander folgen, durch
so dass die vorstehenden Beziehungen

$$K = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-}$$

$$iK' = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-}$$

nur dann einen vollständig bestimmten Sinn
Weg zeigt*), welchen die Grösse u = sin am
x von 0 bis K und dann von K bis K + iK
das Argument x zwischen diesen Grenzen na
setzen sich ändern kann, muss man ferner
sprechenden Wege, die sich daraus ergebe
Integration in Bezug auf u zu demselben R
dem Falle, wo man K und K', also auch x
die besonderen Gesetze stellt:

$$x = 2\frac{K}{\pi}t,$$

$$x = K + \frac{2iK'}{\pi}\tau,$$

wo t und τ von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ in continuirlicher
wir die hier gestellte Frage beantworten.

Dass zunächst $\sin am\left(\frac{2Kt}{\pi}\right)$ reell ist
Entwickelung:

$$\sin am\left(\frac{2Kt}{\pi}\right) = \frac{2\sqrt[4]{q}\sin t - 2\sqrt[4]{q^9}\sin 3t -}{1 - 2q\cos 2t + 2q^4\cos 4}$$

deren Anfangswerth die Einheit ist, in den Grenzen 0 und K
positiv. In der That kann sie nur Null werden, wenn

$$H_1(x) = 0,$$

$$\theta_1(x) = 0,$$

d. h. (siehe Seite 19)

$$x = (2m+1)K + 2m'iK',$$

$$x = (2m+1)K + (2m'+1)iK',$$

und keine dieser Wurzeln ist in dem betrachteten Raume vorh
da der Werth $x = K$ grade die obere Grenze dieses Raum
Hieraus schliessen wir, dass wenn t von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ wächst, u
bis 1 zunimmt, und dass in dem Ausdrucke

$$K = \int_0^k \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}$$

das Integral im gewöhnlichen Sinne genommen ist.

Sei zweitens

$$x = K + \frac{2iK'\tau}{\pi}.$$

Da man hat:

$$H\left(K + \frac{2iK'\tau}{\pi}\right) = H_1\left(\frac{2iK'\tau}{\pi}\right),$$

$$\theta\left(K + \frac{2iK'\tau}{\pi}\right) = \theta_1\left(\frac{2iK'\tau}{\pi}\right),$$

kann man setzen:

$$H_1\left(\frac{2iK'\tau}{\right.}$$

$$\sin \operatorname{am}\left(K + \frac{2\,i\,K'\tau}{\pi}\right) = \frac{1}{\sqrt{k}} \ldots$$

$$= \frac{1}{\sqrt{k}}\,\frac{1 - 2\,q_0 \cos 2\tau + 2\,q_0^4 \cos 4\tau \ldots}{1 + 2\,q_0 \cos 2\tau + 2\,q_0^4 \cos 4\tau \ldots}$$

was ebenfalls eine reelle Grösse ist*). Ma
dass die Ableitung in Bezug auf τ, die
$\tau = 0$, $\tau = \frac{\pi}{2}$ verschwindet, in dem gan
Null wird, so dass ebenfalls in dem gewöl
linigen Integration die Gleichung

$$i\,K' = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)\,(1 \ldots}}$$

zu verstehen ist, aus der wir gefunden ha

$$K' = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)\,(1-\ldots}}$$

Bevor wir diesen Gegenstand verlassen, b
Schwierigkeit zu zeigen, die, im Falle K
stattfindet, dass die Annahme, auf die m
dass man x z. B. von 0 bis K nach ei
variiren lassen, dass u beständig reell se
andern Worten, es ist im Allgemeinen un
drucke

$$K = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)\,(1-\ldots}}$$

das Integral immer gradlinig sei, wie wir e

Sei in der That

$$ad - bc = 1,$$

$$\left.\begin{array}{l} a \equiv 1 \\ b \equiv 0 \\ c \equiv 0 \\ d \equiv 1 \end{array}\right\} \text{mod. } 2.$$

tzt man:

$$\mathfrak{Q} = e^{-\pi\frac{\mathfrak{K}}{\mathfrak{K}'}},$$

ergiebt sich

$$\sin \operatorname{an}\left(\frac{2\mathfrak{K}x}{\pi}\right) = \frac{(-1)^{a+c-1}}{\sqrt{k}}$$

$$\frac{2\sqrt[4]{\mathfrak{Q}}\sin x - 2\sqrt[4]{\mathfrak{Q}^9}\sin 3x + 2\sqrt[4]{\mathfrak{Q}^{25}}\sin 5x - \ldots}{1 - 2\mathfrak{Q}\cos 2x + 2\mathfrak{Q}^4\cos 4x - 2\mathfrak{Q}^9\cos 6x + \ldots},$$

ıs bis auf das Zeichen*) derselbe Ausdruck in Bezug auf $\mathfrak{K}$ u
ist, als

$$\text{ı am}\left(\frac{2Kx}{\pi}\right) = \frac{1}{\sqrt{k}}\,\frac{2\sqrt[4]{q}\sin x - 2\sqrt[4]{q^9}\sin 3x + 2\sqrt[4]{q^{25}}\sin 5x - \ldots}{1 - 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x - 2q^9\cos 6x + \ldots}$$

Bezug auf K und K'. Man schliesst daraus, dass $\mathfrak{K}$ wie K du
s Integral gegeben ist:

$$\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}\,.$$

ber wenn b nicht gleich 0 ist, kann der imaginäre Werth

$$\mathfrak{K} = aK + biK'$$

ır aus einem krummlinigen Integral entspringen. — Aber folgen
chtige Resultat bleibt bestehen, wie auch der Weg der Integrat
i. Die Grössen K und K' nämlich erfüllen beide immer die line
ifferenzial-Gleichung zweiter Ordnung:

$$(k - k^3)\frac{d^2 z}{d k^2} + (1 - 3k^2)\frac{dz}{dk} - kz =$$

Das Integral davon mit zwei willkürlichen Constan
mithin:

$$z = CK + C'K'.$$

Diese Gleichung führt zur Entwickelung von K und
der Form: Es sei

$$\mathfrak{k} = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 k^4 + \ldots + \left(\frac{1.3\ldots 2n}{2.4\ldots 2}\right.$$

und $\mathfrak{k}_n$ die Summe der n ersten Glieder dieser Rei

$$K = \frac{\pi}{2}\mathfrak{k},$$

$$K' = \lg\frac{4}{k} - (\mathfrak{k} - 1) - \frac{2}{3.4}(\mathfrak{k} - \mathfrak{k}_1) - \frac{2}{5.6}(\mathfrak{k}$$

Auch ergiebt sich daraus folgende merkwürdige Eig
wir nachher auf einem andern Wege kommen wer

$$KJ' - JK' = \frac{\pi}{2},$$

wo

$$J = \int_0^1 \frac{k^2 u^2\,du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}},\quad J' = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{k^2}{\sqrt{(u^2-1)}}$$

F. Addition der Argumente. Abel'sc

Euler hat zuerst Formeln gefunden, dur

osinus dieser Bogen selbst geben. Dieser ausgezeichnete Analytil
r in der Geschichte der Wissenschaft, so zu sagen, durch se
ivination berühmt geworden ist, fand unter algebraischer Fo
s Integral der Gleichung:

$$1)\quad \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} + \frac{du'}{\sqrt{(1-u'^2)(1-k^2u'^2)}} = 0.$$

es Ergebniss aber giebt eben den Sinus der Amplitude von
mme zweier Argumente, wie wir es eben ausgesprochen hab
zeichnet man nämlich die willkürliche Constante mit C, so
s Integral:

$$2)\quad \frac{u\sqrt{(1-u'^2)(1-k^2u'^2)} + u'\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}{1-k^2u^2u'^2} = C.$$

Setzt man nun:

$$u = \sin \operatorname{am} a,$$

$$u' = \sin \operatorname{am} a',$$

nimmt Gleichung 1) die Form an:

$$da + da' = 0,$$

ebt also unmittelbar

$$a + a' = c.$$

an hat also das Integral derselben Differenzial-Gleichung un
ei verschiedenen Formen, und um die Beziehung, welche zwisch
iden Constanten stattfindet, aufzustellen, muss man von einem a
s andere übergehen. Zu dem Ende bemerken wir, dass c offenl
r Werth von a, für $a' = 0$ ist. Macht man also auch in Gleichu
$a' = 0$ und folglich $u' = 0$, so giebt dieselbe $c = u = \sin \operatorname{am}$
ie Beziehung zwischen den Constanten ist also

$$C = \sin \operatorname{am} c.$$

I. Abel'scher Satz.

Die Ausdrücke für sin am x, cos am x, Δ
u. s. w. erfüllen folgende Beziehungen, welc
dicität dieser Funktionen geben:

I. $\sin \operatorname{am} (x + 2K) = - \sin$

$\sin \operatorname{am} (x + 2iK') = + \sin$

II. $\cos \operatorname{am} (x + 2K) = - \cos$

$\cos \operatorname{am} (x + 2iK') = - \cos$

III. $\Delta \operatorname{am} (x + 2K) = + \Delta \operatorname{am}$

$\Delta \operatorname{am} (x + 2iK') = - \Delta \operatorname{am}$

Man bemerkt, dass die drei Funktionen
bis auf das Vorzeichen wieder einstellen, so
Combinationen zu zweien unter diesen Vorzeic
jeder der Funktionen ein specielles Kennzeic
gewisser Weise alle allgemeineren Funktionen
welche aus sin am x, cos am x, Δ am x zusam
Bezug auf die Perioden dieselben Beziehunge
nämlich unter F (x) und $\mathfrak{F}$ (x) zwei ganze
züglich vom Grade n und n—1 versteht, und

$$\varphi_1 (x) = \sin \operatorname{am} x \, F (\sin^2 \operatorname{am} x) + \frac{d \sin a}{dx}$$

$$\varphi_2 (x) = \cos \operatorname{am} x \, F (\cos^2 \operatorname{am} x) + \frac{d \cos a}{dx}$$

$$\varphi_3 (x) = \Delta \operatorname{am} x \, F (\Delta^2 \operatorname{am} x) + \frac{d \Delta a}{dx}$$

so hat man wie oben:

Diese verschiedenen Ausdrücke sind zu dem Theorem, welch
r geben wollen, nöthig. Mit ihnen ist jedoch noch der folgen
verbinden, dessen Kennzeichen in der vierten Combination
eht, welche noch unter den Vorzeichen im zweiten Gliede m
h ist.

$$\varphi(x + 2K) = + \varphi(x),$$
$$\varphi(x + 2iK') = + \varphi(x).$$

Seien $F(x)$ und $F_1(x)$ Polynome bezüglich vom $n$ten und $n-2$
rade, dann ist $\varphi(x)$ von der Form:

$$\varphi(x) = F(z^2) + \frac{dz}{dx} z F_1(z^2),$$

o z sowohl sin am x, als cos am x oder Δ am x bedeuten ka
i aber, um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, z = sin am
n dann den Zähler und Nenner von $\varphi(x)$ hinstellen zu könn
enden wir den Ausdruck:

$$z = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{H(x)}{\theta(x)}$$

, dieser giebt offenbar als Nenner $\theta^{2n}(x)$, derart dass man set
nn:

$$\varphi(x) = \frac{\Phi(x)}{\theta^{2n}(x)}.$$

a man nun hat:

$$\theta^{2n}(x + 2K) = \theta^{2n}(x),$$
$$\theta^{2n}(x + 2iK') = \theta^{2n}(x)\, e^{-2n\frac{i\pi}{K}(x+iK')},$$

giebt die Beziehung:

$$\Phi x = \varphi x\, \theta^{2n}(x)$$

$$\Phi(x) = A\,H(x-\alpha_1)\,H(x-\alpha_2)\ldots$$

wo A ein constanter Faktor ist.

In der That sieht man mit Hülfe der Gl

$$H(x-\alpha+2K) = -H(x-\alpha$$

$$H(x-\alpha+2iK') = -H(x-\alpha$$

dass man nur die Bedingung anzunehmen bra

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{2n} =$$

so dass die Grössen $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_{2n-1}$ willk wie der constante Faktor A. Es ist aber auc die allgemeinste ganze Funktion, welche den auch nur $2n$ willkürliche Constanten erhält. -

$$\Phi(x) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} a_m\, e^{m\frac{i\pi x}{K}}$$

oder was dasselbe ist:

$$\Phi(x) = \sum a_m\, q^{\frac{m^2}{2n}}\, e^{m\frac{i\pi x}{K}}$$

so giebt die zweite der Beziehungen 1):

$$a_{m+2n} = a_m,$$

es bleiben also in dem Ausdrucke für $\varphi(x)$ $a_0, a_1 \ldots a_{2n-1}$. Somit kann man setzen:

$$\text{I.}\quad \varphi(x) = \frac{A\,H(x-\alpha_1)\,H(x-\alpha_2)}{\theta^{2n}(x)}$$

$$\varphi_1(x) = \frac{A_1 H(x-\alpha_1) H(x-\alpha_2) \ldots H(x-\alpha_{2n+1})}{\theta^{2n+1}(x)},$$

$$\varphi_2(x) = \frac{A_2 H_1(x-\alpha_1) H_1(x-\alpha_2) \ldots H_1(x-\alpha_{2n+1})}{\theta^{2n+1}(x)},$$

$$\varphi_3(x) = \frac{A_3 \theta_1(x-\alpha_1) \theta_1(x-\alpha_2) \ldots \theta_1(x-\alpha_{2n+1})}{\theta^{2n+1}(x)},$$

ter den Grössen α findet die Beziehung statt:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{2n+1} = 0.$$

der Folgerung, welche wir hieraus ziehen werden, besteht d
el'sche Satz im eigentlichen Sinne.

Zu dem Ende gehen wir von den auf $\varphi(x)$ und $\varphi_1(x)$ bezi
hen Gleichungen aus, wo die Funktion $H(x)$ vorkommt, welc
eichzeitig mit x verschwindet, und so die Wurzeln der Gleichung
$(x) = 0$, $\varphi_1(x) = 0$ giebt.

Betrachten wir im Besondern die Funktion $\varphi(x)$, bei welch
h drei verschiedene Fälle darbieten, die den Bedingungen e
rechen:

$$z = \sin \operatorname{am} x,$$

$$z = \cos \operatorname{am} x,$$

$$z = \Delta \operatorname{am} x.$$

e Polynome F und F_1 enthalten 2n Constanten. Indem man d
efficienten von z^{2n} gleich der Einheit setzt, kann man die ande
efficienten durch die Gleichungen ersten Grades bestimmen:

$$\varphi(\alpha_1) = 0, \ \varphi(\alpha_2) = 0 \ldots \varphi(\alpha_{2n-1}) = 0.$$

ann zeigt uns aber die Beziehung I, dass auch für $x = \alpha_{2n}$ $\varphi(x) =$
. d. h. nach der Bedingung, welche die Grössen α verbindet, f

für $z = \sin \mathrm{am}\, x$, $\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = (1 -$

für $z = \cos \mathrm{am}\, x$, $\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = (1 -$

für $z = \Delta \mathrm{am}\, x$, $\left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = (1 -$

Diese Polynome lassen sich in Faktoren ze
erhält man:

$$(z^2 - \sin^2 \mathrm{am}\, \alpha_1)(z^2 - \sin^2 \mathrm{am}\, \alpha_2) \ldots (z^2 -$$
$$\times \left[z^2 - \sin^2 \mathrm{am}(\alpha_1 -\right.$$

im zweiten:

$$(z^2 - \cos^2 \mathrm{am}\, \alpha_1)(z^2 - \cos^2 \mathrm{am}\, \alpha_2) \ldots (z^2 -$$
$$\times \left[z^2 - \cos^2 \mathrm{am}(\alpha_1 -\right.$$

endlich im dritten:

$$(z^2 - \Delta^2 \mathrm{am}\, \alpha_1)(z^2 - \Delta^2 \mathrm{am}\, \alpha_2) \ldots (z^2 - \Delta$$
$$\times \left[z^2 - \Delta^2 \mathrm{am}(\alpha_1 +\right.$$

Die hier aufgestellten Identitäten geben
wenn man $z = 0$ setzt. Wenn man nämlic
Fällen unter L, M, N das Glied im Polynom
z nicht enthält, so hat man die Beziehunge

$$\sin \mathrm{am}(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{2n-1}) = \frac{}{\sin \mathrm{am}\, \alpha_1 \sin}$$

$$\cos \mathrm{am}(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{2n-1}) = \frac{}{\cos \mathrm{am}\, \alpha_1 \cos}$$

$$\Delta \mathrm{am}(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{2n-1}) = \frac{}{\Delta\, \mathrm{am}\, \alpha_1\, \Delta}$$

$$\times\,[\sin^2 \operatorname{am} x - \sin^2 \operatorname{am}(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{2n})].$$

eser zweite Satz würde den Werth von

$$\sin^2 \operatorname{am}(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{2n})$$

ben, wo eine grade Anzahl von Argumenten vorkommt, aber
ste hat den Vorzug, gleichzeitig zu den Ausdrücken von:

$$\sin \operatorname{am}(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{2n-1}),$$

$$\cos \operatorname{am}(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{2n-1}),$$

$$\Delta \operatorname{am}(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{2n-1})$$

führen. Die Bedingung, dass die Anzahl der Argumente ungr
, kommt nicht in Betracht, denn man kann ja eins davon gle
ull setzen. Wir haben aber noch eine Folgerung zu ziehen.
emerken nämlich, dass die Gleichungen:

$$\varphi(\alpha_1) = 0, \quad \varphi(\alpha_2) = 0 \ldots \varphi(\alpha_{2n-1}) = 0$$

der abgekürzt:

$$\varphi(\alpha_i) = 0$$

s Coefficienten von F und F_1 rationale Funktionen folgen
rössen ergeben: im ersten Falle, für $z = \sin \operatorname{am} x$ rationale Fu
onen von

$$\sin \operatorname{am} \alpha_i \quad \text{und} \quad \frac{d \sin \operatorname{am} \alpha_i}{d\alpha_i} = \cos \operatorname{am} \alpha_i \, \Delta \operatorname{am} \alpha_i,$$

n zweiten für $z = \cos \operatorname{am} x$ von

$$\cos \operatorname{am} \alpha_i \quad \text{und} \quad \frac{d \cos \operatorname{am} \alpha_i}{d\alpha_i} = -\sin \operatorname{am} \alpha_i \, \Delta \operatorname{am} \alpha_i,$$

n dritten Falle endlich für $z = \Delta \operatorname{am} x$ von

$$\Delta \operatorname{am} \alpha_i \quad \text{und} \quad \frac{d \Delta \operatorname{am} \alpha_i}{d\alpha_i} = -k^2 \sin \operatorname{am} \alpha_i \cos \operatorname{am} \alpha_i.$$

Dies ist die Form derjenigen Grössen, welche wir so eben
M N bezeichnet haben, und mithin auch die der Werthe von

Wir werden sogleich ein Beispiel geben.

II. Formeln für die Addition zweier Argumente.

Wir werden die vorhergehenden Sätze auf den Fall dreier Argumente $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3$ anwenden, von denen wir das letzte gleich Null setzen; wir nehmen:

$$\varphi(x) = (z^4 + az^2 + b) + cz\frac{dz}{dx}.$$

Im Falle, wo $z = \sin \operatorname{am} x$, nimmt die Grundgleichung die Form an:

$$(z^4 + az^2 + b)^2 - c^2 z^2 \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = z^2 (z^2 - \sin^2 \operatorname{am} \alpha_1)(z^2 - \sin^2 \operatorname{am} \alpha_2) \times [z^2 - \sin^2 \operatorname{am}(\alpha_1 + \alpha_2)],$$

so dass man also $b = 0$ setzen muss. Lässt man aus beiden Gliedern den Faktor z^2 weg, und setzt dann $z = 0$, so ergiebt sich:

$$\sin \operatorname{am}(\alpha_1 + \alpha_2) = \frac{\pm C}{\sin \operatorname{am} \alpha_1 \sin \operatorname{am} \alpha_2}.$$

Die Gleichungen $\varphi(\alpha_1) = 0$, $\varphi(\alpha_2) = 0$ geben dann:

$$\sin^3 \operatorname{am} \alpha_1 + a \sin \operatorname{am} \alpha_1 + c \cos \operatorname{am} \alpha_1 \varDelta \operatorname{am} \alpha_1 = 0,$$

$$\sin^3 \operatorname{am} \alpha_2 + a \sin \operatorname{am} \alpha_2 + c \cos \operatorname{am} \alpha_2 \varDelta \operatorname{am} \alpha_2 = 0,$$

also:

$$\frac{C}{\sin \operatorname{am} \alpha_1 \sin \operatorname{am} \alpha_2} = \frac{\sin^2 \operatorname{am} \alpha_1 - \sin^2 \operatorname{am} \alpha_2}{\sin \operatorname{am} \alpha_1 \cos \operatorname{am} \alpha_2 \varDelta \operatorname{am} \alpha_2 - \sin \operatorname{am} \alpha_2 \cos \operatorname{am} \alpha_1 \varDelta \operatorname{am} \alpha_1}.$$

Für $\alpha_2 = 0$ reducirt sich dieser Ausdruck auf $\sin \operatorname{am} \alpha_1$, man muss also in der Formel das obere Zeichen nehmen. Multiplicirt man noch Zähler und Nenner des Bruches mit

$$\sin \operatorname{am} \alpha_1 \cos \operatorname{am} \alpha_2 \varDelta \operatorname{am} \alpha_2 + \sin \operatorname{am} \alpha_2 \cos \operatorname{am} \alpha_1 \varDelta \operatorname{am} \alpha_1$$

und lässt im Zähler und Nenner den Faktor $\sin^2 \operatorname{am} \alpha_1 - \sin^2 \operatorname{am} \alpha_2$ weg, so ergiebt sich:

$$\sin \operatorname{am}(\alpha_1 + \alpha_2) = \frac{\sin \operatorname{am} \alpha_1 \cos \operatorname{am} \alpha_2 \varDelta \operatorname{am} \alpha_2 + \sin \operatorname{am} \alpha_2 \cos \operatorname{am} \alpha_1 \varDelta \operatorname{am} \alpha_1}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} \alpha_1 \sin^2 \operatorname{am} \alpha_2}$$

ndern Fällen, wo $z = \cos \operatorname{am} x$ und $z = \Delta \operatorname{am} x$ ist, hat hung:

$$z^4 + az^2 + b + cz \frac{dz}{dx} = 0$$

el $z = 1$, welche dem dritten Argument, das man gleich tzt hat, entspricht. Man kann also setzen:

$$z^4 + az^2 + b = (z^2 - 1)(z^2 + m);$$

t für $z = \cos \operatorname{am} x$ zu den Gleichungen:

$$\cos^2 \operatorname{am} \alpha_1 + m + c \frac{\cos \operatorname{am} \alpha_1 \, \Delta \operatorname{am} \alpha_1}{\sin \operatorname{am} \alpha_1} = 0,$$

$$\cos^2 \operatorname{am} \alpha_2 + m + c \frac{\cos \operatorname{am} \alpha_2 \, \Delta \operatorname{am} \alpha_2}{\sin \operatorname{am} \alpha_2} = 0,$$

lem Werthe:

$$\cos \operatorname{am} (\alpha_1 + \alpha_2) = \frac{\pm m}{\cos \operatorname{am} \alpha_1 \cos \operatorname{am} \alpha_2}.$$

hat man für $z = \Delta \operatorname{am} x$ die ganz ähnlichen Beziehungen:

$$\Delta^2 \operatorname{am} \alpha_1 + m + c \frac{\cos \operatorname{am} \alpha_1 \, \Delta \operatorname{am} \alpha_1}{\sin \operatorname{am} \alpha_1} = 0,$$

$$\Delta^2 \operatorname{am} \alpha_2 + m + c \frac{\cos \operatorname{am} \alpha_2 \, \Delta \operatorname{am} \alpha_2}{\cos \operatorname{am} \alpha_2} = 0,$$

$$\Delta \operatorname{am} (\alpha_1 + \alpha_1) = \frac{\pm m}{\Delta \operatorname{am} \alpha_1 \, \Delta \operatorname{am} \alpha_2}.$$

Rechnung, die ganz analog derjenigen ist, welche sich auf s bezieht, giebt folgende Formeln:

$$(\alpha_1 + \alpha_2)$$

$$= \frac{\cos \operatorname{am} \alpha_1 \cos \operatorname{am} \alpha_2 - \sin \operatorname{am} \alpha_1 \sin \operatorname{am} \alpha_2 \, \Delta \operatorname{am} \alpha_1 \, \Delta \operatorname{am} \alpha_2}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} \alpha_1 \sin^2 \operatorname{am} \alpha_2},$$

$$\alpha_1 + \alpha_2)$$

$$= \frac{\Delta \operatorname{am} \alpha_1 \, \Delta \operatorname{am} \alpha_2 - k^2 \sin \operatorname{am} \alpha_1 \sin \operatorname{am} \alpha_2 \cos \operatorname{am} \alpha_1 \cos \operatorname{am} \alpha_2}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} \alpha_1 \sin^2 \operatorname{am} \alpha_2}.$$

ei Formeln, welche wir aus dem Abel'schen Theorem abhaben, heissen mit vollem Rechte Grundformeln, denn sie vollständig aus, die Funktionen $\sin \operatorname{am} x$, $\cos \operatorname{am} x$, $\Delta \operatorname{am} x$ ren. Aus den ersten Abhandlungen Abels und später aus eiten Gudermanns, eines der besten Schriftsteller, welche

über die Theorie der elliptischen Funktionen geschrieben haben, kann man sehen, wie daraus die doppelte Periodicität folgt; ferner die Ausdrücke für sin am (nx), cos am (nx), Δ am (nx), wo n eine beliebige ganze Zahl ist. Hieraus leitet man, indem man $\frac{x}{n}$ statt x setzt, und zur Grenze für $n = \infty$ übergeht, die analytischen Ausdrücke in der Form von Quotienten der Reihen Θ und H ab. Wir setzen noch folgende Formeln hin, die sich unmittelbar aus den obigen ergeben:

$$\sin \mathrm{am}\,(\alpha_1 - \alpha_2)$$
$$= \frac{\sin \mathrm{am}\,\alpha_1 \cos \mathrm{am}\,\alpha_2\, \Delta \mathrm{am}\,\alpha_2 - \sin \mathrm{am}\,\alpha_2 \cos \mathrm{am}\,\alpha_1\, \Delta \mathrm{am}\,\alpha_1}{1 - k^2 \sin^2 \mathrm{am}\,\alpha_1 \sin^2 \mathrm{am}\,\alpha_2},$$

$$\cos \mathrm{am}\,(\alpha_1 - \alpha_2)$$
$$= \frac{\cos \mathrm{am}\,\alpha_1 \cos \mathrm{am}\,\alpha_2 + \sin \mathrm{am}\,\alpha_1 \sin \mathrm{am}\,\alpha_2\, \Delta \mathrm{am}\,\alpha_1\, \Delta \mathrm{am}\,\alpha_2}{1 - k^2 \sin^2 \mathrm{am}\,\alpha_1 \sin^2 \mathrm{am}\,\alpha_2},$$

$$\Delta \mathrm{am}\,(\alpha_1 - \alpha_2)$$
$$= \frac{\Delta \mathrm{am}\,\alpha_1\, \Delta \mathrm{am}\,\alpha_2 + k^2 \sin \mathrm{am}\,\alpha_1 \sin \mathrm{am}\,\alpha_2 \cos \mathrm{am}\,\alpha_1 \cos \mathrm{am}\,\alpha_2}{1 - k \sin^2 \mathrm{am}\,\alpha_1 \sin^2 \mathrm{am}\,\alpha_2}.$$

Durch Addition und Subtraktion ergiebt sich hieraus:

$$\sin \mathrm{am}\,(\alpha_1 + \alpha_2) + \sin \mathrm{am}\,(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{2 \sin \mathrm{am}\,\alpha_1 \cos \mathrm{am}\,\alpha_2\, \Delta \mathrm{am}\,\alpha_2}{1 - k^2 \sin^2 \mathrm{am}\,\alpha_1 \sin^2 \mathrm{am}\,\alpha_2},$$

$$\cos \mathrm{am}\,(\alpha_1 + \alpha_2) + \cos \mathrm{am}\,(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{2 \cos \mathrm{am}\,\alpha_1 \cos \mathrm{am}\,\alpha_2}{1 - k^2 \sin^2 \mathrm{am}\,\alpha_1 \sin^2 \mathrm{am}\,\alpha_2},$$

$$\Delta \mathrm{am}\,(\alpha_1 + \alpha_2) + \Delta \mathrm{am}\,(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{2\, \Delta \mathrm{am}\,\alpha_1\, \Delta \mathrm{am}\,\alpha_2}{1 - k^2 \sin^2 \mathrm{am}\,\alpha_1 \sin^2 \mathrm{am}\,\alpha_2};$$

$$\sin \mathrm{am}\,(\alpha_1 + \alpha_2) - \sin \mathrm{am}\,(\alpha_1 - \alpha_2)$$
$$= \frac{2 \sin \mathrm{am}\,\alpha_2 \cos \mathrm{am}\,\alpha_1\, \Delta \mathrm{am}\,\alpha_1}{1 - k^2 \sin^2 \mathrm{am}\,\alpha_1 \sin^2 \mathrm{am}\,\alpha_2},$$

$$\cos \mathrm{am}\,(\alpha_1 - \alpha_2) - \cos \mathrm{am}\,(\alpha_1 + \alpha_2)$$
$$= \frac{2 \sin \mathrm{am}\,\alpha_1 \sin \mathrm{am}\,\alpha_2\, \Delta \mathrm{am}\,\alpha_1\, \Delta \mathrm{am}\,\alpha_2}{1 - k^2 \sin^2 \mathrm{am}\,\alpha_1 \sin^2 \mathrm{am}\,\alpha_2},$$

$$\Delta \mathrm{am}\,(\alpha_1 - \alpha_2) - \Delta \mathrm{am}\,(\alpha_1 + \alpha_2)$$
$$= \frac{2 k^2 \sin \mathrm{am}\,\alpha_1 \sin \mathrm{am}\,\alpha_2 \cos \mathrm{am}\,\alpha_1 \cos \mathrm{am}\,\alpha_2}{1 - k^2 \sin^2 \mathrm{am}\,\alpha_1 \sin^2 \mathrm{am}\,\alpha_2}.$$

Indem man in den drei letzten Gleichungen:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = x, \quad \alpha_1 - \alpha_2 = a$$

hält man alle Werthe von x, welche die Gleichungen er-

$$\sin \mathrm{am}\, x = \sin \mathrm{am}\, a,$$

$$\cos \mathrm{am}\, x = \cos \mathrm{am}\, a,$$

$$\Delta \mathrm{am}\, x = \Delta \mathrm{am}\, a.$$

ersten Falle erkennt man leicht, dass alle Auflösungen der
ıenden Gleichung mit denen der folgenden Gleichungen
immen:

$$\sin \mathrm{am} \frac{x - a}{2} = 0 \text{ oder } \infty,$$

$$\cos \mathrm{am} \frac{x + a}{2} = 0,$$

$$\Delta \mathrm{am} \frac{x + a}{2} = 0.$$

bar aus den Formeln, welche Seite 19 für die Wurzeln der
gen

$$(x) = 0, \quad H(x) = 0, \quad \Theta_1(x) = 0, \quad H_1(x) = 0$$

sind, sieht man, dass sich ergiebt:

$$x = a + 4\, m\, K + 2\, m' i\, K',$$

$$x = a + (4\, m + 2)\, K + 2\, m' i\, K'.$$

für:

$$\cos \mathrm{am}\, x = \cos \mathrm{am}\, a$$

an:

$$x = \pm a + 4\, m\, K + 4\, m' i\, K',$$

$$x = \pm a + (4\, m + 2)\, K + 4\, m' i\, K',$$

facher:

$$x = \pm a + 2\, m\, (K + i\, K') + 4\, m' i\, K'$$

$$\Delta \mathrm{am}\, x = \Delta \mathrm{am}\, a$$

$$x = \pm a + 2\, m\, K + 4\, m' i\, K'.$$

n Formeln bedeuten m und m' beliebige ganze positive oder
Zahlen. Die Formeln für die Addition zweier Argumente

geben noch zu vielen andern Bemerkungen Anlass. Beschränken wir uns hier auf diejenigen Ergebnisse, welche sich auf die Verdoppelung und auf diejenigen Werthe beziehen, welche die drei Funktionen annehmen, wenn man das Argument gleich einer halben Periode setzt. Die ersteren ergeben sich unmittelbar aus den Grundformeln:

$$\sin\mathrm{am}\, 2\alpha = \frac{2 \sin\mathrm{am}\,\alpha \cos\mathrm{am}\,\alpha\, \Delta\mathrm{am}\,\alpha}{1 - k^2 \sin^4\mathrm{am}\,\alpha},$$

$$\cos\mathrm{am}\, 2\alpha = \frac{1 - 2\sin^2\mathrm{am}\,\alpha + k^2 \sin^4\mathrm{am}\,\alpha}{1 - k^2 \sin^4\mathrm{am}\,\alpha},$$

$$\Delta\mathrm{am}\, 2\alpha = \frac{1 - 2k^2\sin^2\mathrm{am}\,\alpha + k^2 \sin^4\mathrm{am}\,\alpha}{1 - k^2 \sin^4\mathrm{am}\,\alpha}.$$

Hieraus ergeben sich folgende Werthe, die von Gudermann herrühren:

$$\sin\mathrm{am}\,\frac{K}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+k'}},$$

$$\cos\mathrm{am}\,\frac{K}{2} = \frac{k'}{\sqrt{1+k'}},$$

$$\Delta\mathrm{am}\,\frac{K}{2} = \sqrt{k'};$$

$$\sin\mathrm{am}\,\frac{iK'}{2} = \frac{i}{\sqrt{k}},$$

$$\cos\mathrm{am}\,\frac{iK'}{2} = \frac{i}{\sqrt{1+k}},$$

$$\Delta\mathrm{am}\,\frac{iK'}{2} = \sqrt{1+k};$$

$$\sin\mathrm{am}\left(\frac{K}{2} \pm iK'\right) = \frac{1}{\sqrt{1-k'}},$$

$$\cos\mathrm{am}\left(\frac{K}{2} \pm iK'\right) = \mp i\sqrt{\frac{k'}{1-k'}},$$

$$\Delta\mathrm{am}\left(\frac{K}{2} \pm iK'\right) = \mp i\sqrt{k'};$$

$$\sin \operatorname{am}\left(K \pm \frac{iK'}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{k}},$$

$$\cos \operatorname{am}\left(K \pm \frac{iK'}{2}\right) = \mp i \sqrt{\frac{1-k}{k}},$$

$$\Delta \operatorname{am}\left(K \pm \frac{iK'}{2}\right) = \sqrt{1-k};$$

$$\sin \operatorname{am}\left(\frac{K \pm iK'}{2}\right) = \sqrt{1 \pm \frac{ik'}{k}},$$

$$\cos \operatorname{am}\left(\frac{K \pm iK'}{2}\right) = (1 \mp i) \sqrt{\frac{k'}{2k}},$$

$$\Delta \operatorname{am}\left(\frac{K \pm iK'}{2}\right) = k' \sqrt{1 \mp \frac{ik'}{k}}.$$

III. Von der Multiplication der Argumente.

er wichtige Theil der Theorie der elliptischen Funktionen
ge mit der Theorie der Transformation verknüpft, mit der
hier nicht beschäftigen werden, dass wir uns auf die Mit-
einer kleinen Anzahl von Ergebnissen beschränken müssen.

zunächst n eine grade Zahl, und setzen wir:

$$m = \frac{n^2}{2},$$

an:

$$\sin \operatorname{am}(nx)$$
$$\cos \operatorname{am} x \Delta \operatorname{am} x \frac{\sin \operatorname{am} x + A' \sin^3 \operatorname{am} x + \ldots + G' \sin^{2m-3} \operatorname{am} x}{1 + A \sin^2 \operatorname{am} x + \ldots + H \sin^{2m} \operatorname{am} x},$$

$$1)^{\frac{n}{2}} \cos \operatorname{am}(nx) = \frac{1 + A'_1 \cos^2 \operatorname{am} x + \ldots + H'_1 \cos^{2m} \operatorname{am} x}{1 + A_1 \cos^2 \operatorname{am} x + \ldots + H_1 \cos^{2m} \operatorname{am} x},$$

$$1)^{\frac{n}{2}} \Delta \operatorname{am}(nx) = \frac{1 + A'_2 \Delta^2 \operatorname{am} x + \ldots + H'_2 \Delta^{2m} \operatorname{am} x}{1 + A_2 \Delta^2 \operatorname{am} x + \ldots + H_2 \Delta^{3m} \operatorname{am} x}.$$

r n ungrade und setzen wir $m = \frac{n^2-1}{2}$ so hat man:

$$\sin \operatorname{am}(nx) = n \frac{\sin \operatorname{am} x + a' \sin^3 \operatorname{am} x + \ldots + h' \sin^{2m+1} \operatorname{am} x}{1 + a \sin^2 \operatorname{am} x + \ldots + h \sin^{2m} \operatorname{am} x},$$

$$\cos \operatorname{am}(nx) = n \frac{\cos \operatorname{am} x + a'_1 \cos^3 \operatorname{am} x + \ldots + h'_1 \cos^{2m+1} \operatorname{am} x}{1 + a_1 \cos^2 \operatorname{am} x + \ldots + h_1 \cos^{2m} \operatorname{am} x},$$

$$\Delta \operatorname{am}(nx) = n \frac{\Delta \operatorname{am} x + a'_2 \Delta^3 \operatorname{am} x + \ldots + h'_2 \Delta^{2m+1} \operatorname{am} x}{1 + a_2 \Delta^2 \operatorname{am} x + \ldots + h_2 \Delta^{2m} \operatorname{am} x}.$$

Alle Coefficienten in diesen verschiedenen Formeln sind rationale und ganze Funktionen von k^2. Zu ihrer Bestimmung hat Jakobi für den Fall, wo n ungrade ist, folgenden Satz gegeben. — Sei $\sin \operatorname{am}(x) = \frac{u}{\sqrt{k}}$, $\sin \operatorname{am}(nx) = \frac{U}{\sqrt{k}}$, ferner $U = \frac{P}{Q}$, P und Q ganze Polynome in Bezug auf u sind; mache man

$$\alpha = k + \frac{1}{k},$$

so genügen diese beiden Polynome der folgenden linearen partiellen Differenzialgleichung:

$$u^2 (n^2-1) u^2 z + (n^2-1)(\alpha u - 2u^3) \frac{dz}{du}$$
$$+ (1 - \alpha u^2 + u^4) \frac{d^2 z}{du^2} = 2n^2 (\alpha^2 - 4) \frac{dz}{d\alpha}.$$

G. Von den Funktionen zweiter und dritter Gattung.

Man kommt auf dieselben durch die Betrachtung des Integrals

$$\int F(\sin \operatorname{am} x, \cos \operatorname{am} x, \Delta \operatorname{am} x)\, dx,$$

wo F eine beliebige rationale Funktion anzeigt. Mit diesem wollen wir uns jetzt beschäftigen.

Sei wie oben:

$$u = \sin \operatorname{am} x,$$
$$v = \cos \operatorname{am} x,$$
$$w = \Delta \operatorname{am} x,$$

an leicht, dass das Integral sich auf die Form bringen

$$\int (A + Bv + Cw + Dvw)\, dx,$$

C D rationale Funktionen von u allein sind. Hieraus folgt ler Theil

$$A\,dx$$

ntersucht zu werden braucht, denn für die beiden folgenden st sich die Integration auf die von Quadratwurzeln aus ien Funktionen zweiten Grades zurückführen, wenn man ɔhängige Variable betrachtet, und der letzte Theil führt rationale Funktionen. Also nur aus dem Ausdrucke $\int A\,dx$ möglicherweise durch Integration neue Funktionen er- nd diese Vermuthung wird sich durch die folgenden Be- n als richtig erweisen.

$$A = \frac{\varphi\,(u)}{\psi\,(u)},$$

ψ ganze Polynome bezeichnen. Indem man Zähler und s Bruches mit $\psi\,(-u)$ multiplicirt und setzt:

$$\psi\,(u)\,\psi\,(-u) = \Psi\,(u^2),$$

$$\varphi\,(u)\,\psi\,(-u) = \Phi\,(u^2) + u\,\Phi_1\,(u^2),$$

ser Integral in die beiden folgenden:

$$\int \frac{\Phi\,(u^2)}{\Psi\,(u^2)}\,dx, \qquad \int u\,\frac{\Phi_1\,(u^2)}{\Psi\,(u^2)}\,dx,$$

das zweite ebenfalls auf Wurzeln von Ausdrücken zweiten rückgeführt werden kann, denn setzt man $u^2 = t$, so

$$\frac{1}{2}\int \frac{\Phi_1\,(t)}{\Psi\,(t)}\,\frac{dt}{\sqrt{(1-t)\,(t-k^2 t)}}.$$

haben uns also bloss mit dem ersten Integral zu be- welches man durch Zerlegung von $\frac{\Phi\,(u^2)}{\Psi\,(u^2)}$ in Partial- f Ausdrücke von der Form bringen kann:

$$\int u^{2n}\,dx, \quad \int \frac{dx}{(1-\alpha u^2)^p},$$

$$\int \sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}, \quad \int (1-\alpha u^2)^p \sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}.$$

Diese Ausdrücke aber können, wie wir gleich sehen werden, auf ihren einfachsten Fall, wo $n = 1$ und $p = 1$ ist, zurückgeführt werden. — Gehen wir zunächst von der Gleichung aus:

$$\frac{du^m}{dx} = m\, u^{m-1} \sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)},$$

welche durch Differenziiren giebt:

$$\frac{d^2u^m}{dx^2} = m(m-1)\,u^{m-2} - m^2(1+k^2)\,u^m + m(m+1)\,k^2u^{m+2}.$$

Indem man beide Glieder dieser Gleichung in Bezug auf x integrirt, findet man folgende Reductionsformel:

$$\frac{du^m}{dx} = m(m-1)\int u^{m-2}\,dx - m^2(1+k^2)\int u^m\,dx$$

$$+\; m(m+1)\,k^2 \int u^{m+2}\,dx.$$

Sie zeigt, wie man nach und nach das Integral, in welchem $m = 2n$ ist, auf die Fälle, wo $n = 0$ und $n = 1$ ist, zurückführen kann. Der erste giebt einen Ausdruck, der der Variablen proportional ist, der zweite führt ein neues analytisches Element in die Theorie der elliptischen Funktionen ein.

Wir führen als constanten Faktor das Quadrat des Modul ein, und setzen:

$$Z(x) = \int_0^x k^2 \sin^2 \mathrm{am}\, x\, dx.$$

Dies ist die Funktion, die wir von jetzt an als die **zweiter Gattung** bezeichnen wollen.

Gehen wir ferner von der Relation aus:

$$\begin{aligned}\frac{u\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}{(1-\alpha u^2)^{p-1}} = {} & (2p-2)\left(1+\frac{1+k^2}{\alpha}+\frac{k^2}{\alpha^2}\right)\int\frac{dx}{(1-\alpha u^2)^p} \\ & - (2p-3)\left(1+\frac{2+2k^2}{\alpha}+\frac{3k^2}{\alpha^2}\right)\int\frac{dx}{(1-\alpha u^2)^{p-1}} \\ & + (2p-4)\left(\frac{1+k^2}{\alpha}+\frac{3k^2}{\alpha^2}\right)\int\frac{dx}{(1-\alpha u^2)^{p-2}} \\ & - (2p-5)\frac{k^2}{\alpha^2}\int\frac{dx}{(1-\alpha u^2)^{p-3}},\end{aligned}$$

...n giebt die Funktion zweiter Gattung, der zweite einen der ...n proportionalen Ausdruck, also nur der dritte führt zu ...uen Funktion, die wir unter der Form:

$$\int \frac{Au^2\,dx}{1-\alpha u^2},$$

...wir statt:

$$\int \frac{dx}{1-\alpha u^2}$$

...en, untersuchen wollen. Es sei hier:

$$\alpha = k^2 \sin^2 \mathrm{am}\, a,$$

$$A = \frac{1}{2}\frac{d\alpha}{da} k^2 \sin \mathrm{am}\, a \cos \mathrm{am}\, a\, \Delta\, \mathrm{am}\, a.$$

...llen setzen:

$$\Pi(x, a) = \int_0^u \frac{k^2 \sin \mathrm{am}\, a \cos \mathrm{am}\, a\, \Delta\, \mathrm{am}\, a \sin^2 \mathrm{am}\, x\, dx}{1-k^2 \sin^2 \mathrm{am}\, a \sin^2 \mathrm{am}\, x},$$

...se Funktion bezeichnen wir als die der dritten Gattung

...Ausdruck der Funktionen zweiter und dritter Gattung in Θ (x).

...en haben wir folgende Gleichung aufgestellt:

$$(\sin^2 \mathrm{am}\, x + A) + B\frac{d \sin \mathrm{am}\, x}{dx} = C\frac{H(x-\alpha_1)H(x-\alpha_2)H(x\ \ \alpha_3)}{\Theta^3(x)},$$

...Coefficienten A und B durch α_1 und α_2 ausgedrückt werden ... wenn man setzt:

$$\sin \mathrm{am}\, \alpha_1 (\sin^2 \mathrm{am}\, \alpha_1 + A) + B\frac{d \sin \mathrm{am}\, \alpha_1}{d\alpha_1} = 0,$$

$$\sin \mathrm{am}\, \alpha_2 (\sin^2 \mathrm{am}\, \alpha_2 + A) + B\frac{d \sin \mathrm{am}\, \alpha_2}{d\alpha_2} = 0.$$

$$\alpha_1 = -\alpha_2 = a$$

...lich:

$$\alpha_3 = 0$$

nach der Bedingung:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0,$$

so findet man:

$$B = 0, \quad A = -\sin^2 \operatorname{am} a$$

und folglich:

$$\sin \operatorname{am} x\,(\sin^2 \operatorname{am} x - \sin^2 \operatorname{am} a) = C\,\frac{H(x+a)\,H(x-a)\,H(x)}{\Theta^3(x)}.$$

Bestimmen wir C, indem wir $x = 0$ setzen, so wird schliesslich:

$$\sin^2 \operatorname{am} x - \sin^2 \operatorname{am} a = \frac{\Theta^2(0)\,H(x+a)\,H(x-a)}{k\,\Theta^2(x)\,\Theta^2(a)}.$$

Diese wichtige Beziehung nimmt, wenn man a durch $a + iK'$ ersetzt, die neue Form an:

$$1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} a \sin^2 \operatorname{am} x = \frac{\Theta^2(0)\,\Theta(x+a)\,\Theta(x-a)}{\Theta^2(x)\,\Theta^2(a)}.$$

Hierzu kann man auch leicht vermittelst der Identität:

$$\frac{1}{k}\,\frac{H(x+a)\,H(x-a)}{\Theta(x+a)\,\Theta(x-a)} = \sin \operatorname{am}(x+a) \sin \operatorname{am}(x-a)$$

$$= \frac{\sin^2 \operatorname{am} x - \sin^2 \operatorname{am} a}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} a \sin^2 \operatorname{am} x}$$

gelangen. Nimmt man jetzt auf beiden Seiten unserer Gleichung die Logarithmen, so ergiebt sich:

$$\lg(1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} a \sin^2 \operatorname{am} x) = \lg \Theta^2(0) + \lg \Theta(x+a) + \lg \Theta(x-a)$$

$$2 \lg \Theta(x) - 2 \lg \Theta(a),$$

und hieraus erhält man, wenn man in Bezug auf a differenzirt und in Bezug auf x integrirt:

$$\int_0^x \frac{k^2 \sin \operatorname{am} a \cos \operatorname{am} a\, \Delta \operatorname{am} a \sin^2 \operatorname{am} x\, dx}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} a \sin^3 \operatorname{am} x}$$

$$= \Pi(x, a) = x\,\frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)} + \frac{1}{2} \lg \frac{\Theta(x-a)}{\Theta(x+a)}.$$

Das ist der analytische Ausdruck der Funktion dritter Gattung, wie ihn Jakobi entdeckt hat.

Wenn man durch a dividirt und dann $a = 0$ setzt, erhält man:

$$\int_0^x k^2 \sin^2 \operatorname{am} x \, dx = Z(x) = \zeta(x) - \frac{\theta'(x)}{\theta(x)},$$

zt wurde:

$$\zeta = 8 \frac{q - 4q^4 + 9q^9 - 16q^{16} + 25q^{25} - \dots}{1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + 2q^{16} - \dots}.$$

s ist der Ausdruck für die Funktion zweiter Gattung, den Jakobi gegeben hat, und der uns zugleich zu den Grund-aften dieser Funktion führen wird.

II. Von der Funktion Z (x).

erste ihrer Eigenschaften ist, dass sie für jeden reellen und en Werth der Variablen nur eine einzige Bestimmung zulässt. gt auch aus der Betrachtung des Integrals $\int_0^k k^2 \sin^2 \operatorname{am} z \, dz$ bar. In der That ist für eine beliebige Wurzel der Glei-

$$\frac{1}{\sin \operatorname{am}(z)} = 0,$$

für:

$$z = 2mK + (2m'+1)iK'$$

sprechende Residuum*) von $k^2 \sin^2 \operatorname{am} z$, d. h. der Coefficient in

$$k^2 \sin^2 \operatorname{am}[2mK + (2m'+1)iK' + \varepsilon] = \frac{1}{\sin^2 \operatorname{am} \varepsilon}$$

Null. Denn $\sin^2 \operatorname{am} \varepsilon$ enthält in seiner Entwickelung nur Potenzen von ε. Die Integration, welche Wege auch die z zurücklege, führt daher nur zu einer einzigen Bestim- Wir können also ohne Zweideutigkeit, indem wir uns der rass'schen Bezeichnungen bedienen:

$$J = \int_0^K k^2 \sin^2 \operatorname{am} x \, dx,$$

$$iJ' = \int_K^{K+iK'} k^2 \sin^2 \operatorname{am} x \, dx$$

---

*) Die zum Verständniss nothwendigen Sätze des Cauchy'schen Re-lculs enthält der Anhang. D. U.

Diese Grössen heissen vollständige Funktionen zweiter Gattung, und sind mit den vollständigen Funktionen der ersten Gattung K und K' durch die schon erwähnte Gleichung verbunden:

$$KJ' - K'J = \frac{\pi}{2},$$

welche wir jetzt beweisen wollen.

Zu dem Ende setzen wir nach einander

$$z = K,$$

$$z = K + iK',$$

in der Grundgleichung:

$$Z(x) = \zeta x - \frac{\theta'(x)}{\theta(x)}.$$

Die erste Substitution giebt augenblicklich:

$$J = \zeta K,$$

da

$$\theta'(K) = 0.$$

Was die zweite anbetrifft, so gehen wir von der Beziehung, welche Seite 18 gegeben ist, aus:

$$\theta_1(x + iK') = H_1(x)\, e^{-\frac{i\pi}{4K}(2x+iK')},$$

aus ihr ergiebt sich:

$$\lg \theta_1(x + iK') = \lg H_1(x) - \frac{i\pi}{4K}(2x + iK').$$

Differenziirt man in Bezug auf x, so erhält man:

$$\frac{\theta'_1(x + iK')}{\theta_1(x + iK')} = \frac{H'_1(x)}{H_1(x)} - \frac{i\pi}{2K}.$$

Setzt man $x = 0$, so wird die Ableitung der graden Funktion $H_1(x)$ verschwinden, und man bekommt:

$$\frac{\theta'_1(iK')}{\theta_1(iK')} = \frac{\theta'(K + iK')}{\theta(K + iK')} = -\frac{i\pi}{2K};$$

hieraus folgt:

$$Z(K + iK') = \zeta(K + iK') + \frac{i\pi}{2K},$$

und folglich:

$$J' = \frac{Z(K+iK') - Z(K)}{i} = \zeta K' + \frac{\pi}{2K}.$$

setzt man ζ durch $\frac{J}{K}$, so hat man die zu beweisende Glei-

Ist der Modul k reell und kleiner als Eins, so kann man J' durch gradlinige Integrale ausdrücken:

$$J = \int_0^1 \frac{k^2 x^2 dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x^2)}},$$

$$J' = \int_1^{\frac{1}{k}} \frac{k^2 x^2 dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-k^2 x^2)}},$$

nz wie für K und K' erhält man die Reihen:

$$J = \frac{\pi}{2} \mathfrak{J},$$

$$\mathfrak{J} \lg \frac{4}{k} + 1 - (\mathfrak{J} - \mathfrak{J}_1) - \frac{2}{3.4}(\mathfrak{J} - \mathfrak{J}_2) - \frac{2}{5.6}(\mathfrak{J} - \mathfrak{J}_3) - \dots,$$

$$= \frac{1}{2} k^2 + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^2 k^4 + \frac{5}{6}\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 k^6 + \frac{7}{8}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 k^8 + \dots,$$

$$= \frac{1}{2} k^2 + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^2 k^4 + \dots + \frac{2n-3}{2n-2}\left(\frac{1.3\dots 2n-5}{2.4\dots 2n-4}\right)^2 k^{2n-2}$$

$$\frac{1}{2} \frac{2n-1}{2n} \left(\frac{1.3\dots 2n-3}{2.4\dots 2n-2}\right)^2 k^{2n}.$$

iejenige Eigenschaft der Funktion zweiter Gattung aber, welche rakteristisch zu betrachten ist, und welche ihre Einführung nz neues analytisches Element in die Theorie der elliptischen onen rechtfertigt, ist die durch folgende Gleichungen gegebene:

$$Z(x + 2K) = Z(x) + 2J,$$
$$Z(x + 2iK') = Z(x) + 2iJ'.$$

Beziehungen, welche sich unmittelbar aus den Grundgleichungen:

$$\theta(x + 2K) = \theta(x),$$

$$\theta(x + 2iK') = \theta(x)\, e^{-\frac{i\pi}{K}(x + iK')}$$

n, wenn man die logarithmischen Ableitungen nimmt, definiren That eine neue Art von Funktionen, welche eindeutig sind, ch, wenn man die Argumente um die Grössen 2K und 2iK'

vermehrt, mit Hinzufügung einer Constanten reproduciren. Später wird man die Wichtigkeit dieses Kennzeichens einsehen, welches nicht mehr mit der doppelten Periodicität übereinstimmt, aber sich enge an dieselbe anschliesst. — Man gelangt übrigens dazu noch auf eine andere Art, indem man von der Gleichung ausgeht:

$$Z(x+a) = Z(x) + Z(a) + k^2 \sin am x \sin am a \sin am (x+a),$$

d. h. von dem Additionstheorem der Argumente in der Funktion zweiter Gattung, welches Jakobi folgendermassen beweist. — Differenziiren wir die Gleichung:

$$\Pi(x, a) = x \frac{\theta'(a)}{\theta(a)} + \frac{1}{2} \lg \frac{\theta(x-a)}{\theta(x+a)}$$

in Bezug auf x, so ergiebt sich:

$$\frac{k^2 \sin am a \cos am a \, \Delta am a \sin^2 am x}{1-k^2 \sin^2 am a \sin^2 am x}$$

$$= \frac{\theta'(a)}{\theta(a)} + \frac{1}{2}\frac{\theta'(x-a)}{\theta(x-a)} - \frac{1}{2}\frac{\theta'(x+a)}{\theta(x+a)}$$

$$= -Z(a) + \frac{1}{2} Z(x+a) - \frac{1}{2} Z(x-a),$$

also wenn man x und a vertauscht:

$$\frac{k^2 \sin am x \cos am x \, \Delta am x \sin^2 am a}{1-k^2 \sin^2 am a \sin^2 am x}$$

$$= -Z(x) + \frac{1}{2} Z(x+a) + \frac{1}{2} Z(x-a).$$

Addirt man diese Gleichungen Glied für Glied, so erhält man:

$$k^2 \sin am x \sin am a \sin am (x+a) = Z(x+a) - Z(x) - Z(a).$$

III. Von der Funktion Π (x, a).

Als eine der schönsten Entdeckungen Jakobi's ist die Darstellung von Π (x, a), worin zwei Grössen, das Argument x und der Parameter a, vorkommen, durch die Beziehung:

$$\Pi(x, a) = x \frac{\theta'(a)}{\theta(a)} + \frac{1}{2} \lg \frac{\theta(x-a)}{\theta(x+a)}$$

zu betrachten, in welcher nur die eine Funktion θ nebst ihrer Ableitung vorkommt. Es möchte selbst wegen der Einfachheit dieses Ausdrucks unnütz erscheinen, die Funktion dritter Ordnung mit

esondern Bezeichnung und als ein eigenes analytisches Ele-
einzuführen. Indess ist diese Bezeichnung durch Legendre's
en, welche Jakobi's Entdeckung vorausgingen, einmal einge-
und wir werden sie bei der Darstellung der folgenden Sätze
len.

'ertauschung der Amplitude und des Parameter.

nmittelbar erhält man aus der Grundgleichung:

$$\Pi(x, a) - \Pi(a, x) = x\frac{\theta'(a)}{\theta(a)} - a\frac{\theta'(x)}{\theta(x)}$$

ıch:

$$\Pi(x, a) - \Pi(a, x) = aZ(x) - xZ(a),$$

nan die Funktion zweiter Gattung einführt.

ese Eigenschaft kann direkt bewiesen und auf die Integrale
: Ordnung ausgedehnt werden durch folgende Methode, welche
ls von Jakobi herrührt.

i $\varphi(x)$ ein Polynom von beliebigem Grade in Bezug auf x,
s jedoch zugleich mit x verschwindet, und

$$F(x, a) = \int_0^x \frac{\sqrt{\varphi a}\,dx}{(x-a)\sqrt{\varphi x}}.$$

fferenz $F(x, a) - F(a, x)$ oder die Summe der Integrale

$$\int_0^x \frac{\sqrt{\varphi a}\,dx}{(x-a)\sqrt{\varphi x}} + \int_0^a \frac{\sqrt{\varphi x}\,da}{(x-a)\sqrt{\varphi a}}$$

ch ersetzen durch das Doppelintegral:

$$\int_0^a\int_0^x \frac{dx\,da}{\sqrt{\varphi x}\sqrt{\varphi a}}\left[\frac{(\varphi' x + \varphi' a)(x-a) + 2\varphi a - 2\varphi x}{2(x-a)^2}\right].$$

nan findet leicht, dass die Grösse innerhalb der Klammer eine
Funktion von x und a ist*), so dass das Doppelintegral sich
Summe von Produkten von folgender Gestalt zerlegen lässt:

Die ganze Funktion:

$$\frac{(\varphi' x + \varphi' a)(x-a) + 2\varphi a - 2\varphi x}{2(x-a)}$$

rindet nämlich für $x = a$, wie man durch Differenziiren des Zählers
nners erkennt, und ist mithin durch $x - a$ theilbar. D. U.

$$\int_0^a \frac{a^m\,da}{\sqrt{\varphi a}} \times \int_0^x \frac{x^n\,dx}{\sqrt{\varphi x}}.$$

Der Fall der elliptischen Integrale würde sich hieraus offenbar ergeben, wenn man setzte:

$$\varphi(x) = x(1-x)(1-k^2 x)$$

und an Stelle der Variablen x und a die Grössen $\frac{1}{k^2 \sin^2 \operatorname{am} x}$ und $\sin^2 \operatorname{am} a$ nähme.

b) Von den vollständigen Funktionen.

In der obigen Gleichung:

$$\Pi(x, a) - \Pi(a, x) = a\,Z(x) - x\,Z(a)$$

setzen wir:

$$x = K \quad \text{und} \quad x = K + iK';$$

mit Berücksichtigung, dass

$$\Pi(a, K) = 0,$$

$$\Pi(a, K + iK') = 0,$$

findet man:

$$\Pi(K, a) = a\,Z(K) - K\,Z(a) = a\,J - K\,Z(a)$$

und

$$\Pi(K + iK') - \Pi(K) = i a J' - iK' Z(a).$$

Dies sind also die Werthe der vollständigen Funktionen oder der bestimmten Integrale:

$$\Pi(K) = \int_0^K \frac{k^2 \sin \operatorname{am} a \cos \operatorname{am} a\, \Delta \operatorname{am} a \sin^2 \operatorname{am} x\, dx}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} a \sin^2 \operatorname{am} x},$$

$$\Pi(K + iK') - \Pi(K)$$

$$= \int_K^{K+iK'} \frac{k^2 \sin \operatorname{am} a \cos \operatorname{am} a\, \Delta \operatorname{am} a \sin^2 \operatorname{am} x\, dx}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} a \sin^2 \operatorname{am} x}.$$

Bezeichnet man sie für einen Augenblick mit H und iH', so ergiebt sich:

$$\Pi(x + 2K, a) = \Pi(x, a) + 2H,$$

$$\Pi(x + 2iK', a) = \Pi(x, a) + 2iH',$$

und

$$KH' - HK' = \frac{a\pi}{2}.$$

ken wir jedoch in Bezug auf die Funktion dritter Gattung, wenn man den Weg sich ändern lässt, welchen die Variable er Integration beschreibt, ein positives oder negatives Viel- von $\pi \sqrt{-1}$ hinzutritt, so dass diese Relationen nur für ge- Integrationswege stattfinden, während die analogen Beziehungen zug auf die Funktion zweiter Gattung keiner Beschränkung her Art unterliegen.

c) Addition der Argumente.

Betrachten wir, um einen bestimmten Fall zu haben, eine un- Zahl von Argumenten:

$$\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_{2n+1},$$

e durch die Gleichung verbunden sind:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_{2n+1} = 0.$$

ird dann die Grundgleichung:

$$\Pi(x, a) = x \frac{\Theta'(a)}{\Theta(a)} + \frac{1}{2} \lg \frac{\Theta(x-a)}{\Theta(x+a)}$$

n:

$$\Pi(\alpha_1, a) + \Pi(\alpha_2, a) + \ldots + \Pi(\alpha_{2n+1}, a)$$
$$= \frac{1}{2} \lg \frac{\Theta(\alpha_1 - a)\Theta(\alpha_2 - a) \ldots \Theta(\alpha_{2n+1} - a)}{\Theta(\alpha_1 + a)\Theta(\alpha_2 + a) \ldots \Theta(\alpha_{2n+1} + a)}.$$

Es lässt sich nun zeigen, dass die Grösse unter dem logarith- hen Zeichen rational ausgedrückt werden kann durch:

$$\text{A)} \left\{ \begin{array}{l} \sin\operatorname{am}\alpha_1, \quad \sin\operatorname{am}\alpha_2 \ldots \sin\operatorname{am}\alpha_{2n+1}, \\ \dfrac{d\sin\operatorname{am}\alpha_1}{d\alpha_1}, \dfrac{d\sin\operatorname{am}\alpha_2}{d\alpha_2} \ldots \dfrac{d\sin\operatorname{am}\alpha_{2n+1}}{d\alpha_{2n+1}}. \end{array} \right.$$

Zu dem Ende erinnern wir daran, dass, wenn $\mathfrak{F}(x)$ und $\mathfrak{F}_1(x)$ beliebige Polynome von x von den Graden n und n—1 sind, wenn man setzt:

$$\varphi(x) = \sin\operatorname{am} x\, \mathfrak{F}(\sin^2\operatorname{am} x) + \frac{d\sin\operatorname{am} x}{dx} \mathfrak{F}_1(\sin^2\operatorname{am} x),$$

ende Beziehung (Seite 61) erhalten wurde:

$$\varphi(x) = \frac{A\, H(x-\alpha_1) H(x-\alpha_2) \ldots H(x-\alpha_{2n+1})}{\Theta^{2n+1}(x)},$$

die Coefficienten der Polynome $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}_1$ durch die linearen ichungen:

$$\varphi(\alpha_1) = 0, \; \varphi(\alpha_2) = 0 \ldots \varphi(\alpha_{2n}) = 0$$

bestimmt wurden, und also rationale Funktionen der Grössen A) waren. Vertauscht man nun x mit $-x$, so ergiebt sich:

$$\varphi(-x) = -\frac{A\,H(x+\alpha_1)\,H(x+\alpha_2)\ldots H(x+\alpha_{2n+1})}{\theta^{2n+1}(x)},$$

und hieraus folgt:

$$\frac{\varphi(x)}{\varphi(-x)} = -\frac{H(x-\alpha_1)\,H(x-\alpha_2)\ldots H(x-\alpha_{2n+1})}{H(x+\alpha_1)\,H(x+\alpha_2)\ldots H(x+\alpha_{2n+1})}.$$

Setzt man aber:

$$x = a + iK',$$

also:

$$\sin\operatorname{am} x = \frac{1}{k\sin\operatorname{am} a},$$

$$\frac{d\sin\operatorname{am} x}{dx} = -\frac{1}{k\sin^2\operatorname{am} a}\,\frac{d\sin\operatorname{am} a}{da},$$

so verwandelt sich die Grösse:

$$\frac{H(x-\alpha_1)\,H(x-\alpha_2)\ldots H(x-\alpha_{2n+1})}{H(x+\alpha_1)\,H(x+\alpha_2)\ldots H(x+\alpha_{2n+1})}$$

in:

$$\frac{\theta(a-\alpha_1)\,\theta(a-\alpha_2)\ldots\theta(a-\alpha_{2n+1})}{\theta(a+\alpha_1)\,\theta(a+\alpha_2)\ldots\theta(a+\alpha_{2n+1})}$$

und der Ausdruck für dieselbe ist nach dem Obigen:

$$\frac{\dfrac{1}{k\sin\operatorname{am} a}\,\mathfrak{F}\left(\dfrac{1}{k^2\sin^2\operatorname{am} a}\right) - \dfrac{1}{k\sin^2\operatorname{am} a}\,\dfrac{d\sin\operatorname{am} a}{da}\,\mathfrak{F}_1\left(\dfrac{1}{k^2\sin^2\operatorname{am} a}\right)}{\dfrac{1}{k\sin\operatorname{am} a}\,\mathfrak{F}\left(\dfrac{1}{k^2\sin^2\operatorname{am} a}\right) + \dfrac{1}{k\sin^2\operatorname{am} a}\,\dfrac{d\sin\operatorname{am} a}{da}\,\mathfrak{F}_1\left(\dfrac{1}{k^2\sin^2\operatorname{am} a}\right)}.$$

Multiplicirt man Zähler und Nenner dieses Bruches mit $\sin^{2m+1}\operatorname{am} a$, so nimmt er die Form an:

$$\frac{\sin\operatorname{am} a\,F(\sin^2\operatorname{am} a) - \dfrac{d\sin\operatorname{am} a}{da}\,F_1(\sin^2\operatorname{am} a)}{\sin\operatorname{am} a\,F(\sin^2\operatorname{am} a) + \dfrac{d\sin\operatorname{am} a}{da}\,F_1(\sin^2\operatorname{am} a)},$$

wo $F(x)$ und $F_1(x)$ ebenso wie $\mathfrak{F}(x)$ und $\mathfrak{F}_1(x)$ Polynome von den Graden n und $n-1$ in Bezug auf x sind. — Wenn man nun das Argument α_{2n+1} durch $-(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{2n})$ ersetzt, hat man die folgende Gleichung:

$$a_1, a) + \Pi(a_2, a) + \ldots + \Pi(a_{2n}, a) = \Pi(a_1 + a_2 + \ldots + a_{2n}, a)$$

$$+ \frac{1}{2} \lg \frac{\sin \operatorname{am} a\, F(\sin^2 \operatorname{am} a) - \frac{d \sin \operatorname{am} a}{da} F_1(\sin^2 \operatorname{am} a)}{\sin \operatorname{am} a\, F(\sin^2 \operatorname{am} a) + \frac{d \sin \operatorname{am} a}{da} F_1(\sin^2 \operatorname{am} a)}.$$

Dies ist das Additionstheorem der Argumente unter der von aufgestellten Form.

'on den verschiedenen der Funktion dritter Gattung analogen Funktionen.

Wichtige mechanische Untersuchungen führen oft dazu, Integrale, he der Funktion dritter Gattung ähnlich sind und sich vermöge cher Substitution auf die Form derselben bringen lassen, auf Funktionen θ zurückzuführen. Daher hat Jakobi in seiner denkligen Arbeit über die Rotation der Körper für nöthig gefunden, folgende Zusammenstellung zu geben, welche diese verschiedenen grale, so wie ihren Ausdruck durch die Funktion θ vollständig unter der einfachsten Form enthält:

$$\int_0^x \frac{k^2 \sin \operatorname{am} a \cos \operatorname{am} a\, \Delta \operatorname{am} a \sin^2 \operatorname{am} x\, dx}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} a \sin^2 \operatorname{am} x} = x \frac{\theta'(a)}{\theta(a)} + \frac{1}{2} \lg \frac{\theta(x-a)}{\theta(x+a)},$$

$$\int_0^x \frac{k^2 \sin \operatorname{am} a \cos \operatorname{am} a \cos^2 \operatorname{am} x\, dx}{\Delta \operatorname{am} a (1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} a \sin^2 \operatorname{am} x)} = - x \frac{\theta'_1(a)}{\theta_1(a)} - \frac{1}{2} \lg \frac{\theta(x-a)}{\theta(x+a)},$$

$$\int_0^x \frac{\operatorname{tg} \operatorname{am} a\, \Delta \operatorname{am} a\, \Delta^2 \operatorname{am} x\, dx}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} a \sin^2 \operatorname{am} x} = - x \frac{H'_1(a)}{H_1(a)} - \frac{1}{2} \lg \frac{\theta(x-a)}{\theta(x+a)},$$

$$\int_0^x \frac{\Delta \operatorname{am} a \cot \operatorname{am} a\, dx}{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} a \sin^2 \operatorname{am} x} = x \frac{H'(a)}{H(a)} + \frac{1}{2} \lg \frac{\theta(x-a)}{\theta(x+a)},$$

$$\int_0^x \frac{\sin \operatorname{am} a \cos \operatorname{am} a\, \Delta \operatorname{am} a\, dx}{\sin^2 \operatorname{am} a - \sin^2 \operatorname{am} x} = - x \frac{\theta'(a)}{\theta(a)} + \frac{1}{2} \lg \frac{H(a+x)}{H(a-x)},$$

$$\int_0^x \frac{\sin \operatorname{am} a \cos \operatorname{am} a\, \Delta^2 \operatorname{am} x\, dx}{\Delta \operatorname{am} a (\sin^2 \operatorname{am} a - \sin^2 \operatorname{am} x)} = - x \frac{\theta'_1(a)}{\theta_1(a)} + \frac{1}{2} \lg \frac{H(a+x)}{H(a-x)},$$

$$\int_0^x \frac{\operatorname{tg} \operatorname{am} a\, \Delta \operatorname{am} a \cos^2 \operatorname{am} x\, dx}{\sin^2 \operatorname{am} a - \sin^2 \operatorname{am} x} = - x \frac{H'_1(a)}{H_1(a)} + \frac{1}{2} \lg \frac{H(a+x)}{H(a-x)},$$

$$\int_0^x \frac{\Delta \operatorname{am} a \cot \operatorname{am} a \sin^2 \operatorname{am} x\, dx}{\sin^2 \operatorname{am} a - \sin^2 \operatorname{am} x} = - x \frac{H'(a)}{H(a)} + \frac{1}{2} \lg \frac{H(a+x)}{H(a-x)}.$$

Man kann diese Gleichungen unmittelbar beweisen. Die zweite, tte und vierte nämlich folgen aus der ersten, wenn man x und a ch der Reihe vertauscht mit:

$$x + K, \; a + K,$$

$$x + K + iK', \; a + K + iK',$$

$$x + iK', \; a + iK'.$$

Aus den so erhaltenen Gleichungen werden die vier letzten gefunden, wenn man x durch $x + iK'$ in jeder ersetzt.*)

II. Von den Weierstrass'schen Funktionen.

Es wurde bereits bemerkt, dass sin am x, cos am x, Δ am x für Werthe von x, welche kleiner als Eins sind, in Reihen nach Potenzen der Variablen entwickelt werden können, deren Coefficienten ganze Funktionen von k^2 mit rationalen Coefficienten sind. Offenbar findet Gleiches bei $\sin^2$ am x, bei der Funktion zweiter Ordnung:

$$Z(x) = \int_0^x k^2 \sin^2 \operatorname{am} x \, dx,$$

bei ihrem Integral:

$$\int_0^x Z(x)\, dx$$

und selbst bei dem Ausdrucke

$$e^{-\int_0^x Z(x)\, dx}$$

statt. Aber während für $\sin^2$ am x, $Z(x)$, $\int_0^x Z(x)\, dx$ die Ent-

---

*) Wenn man eine beliebige der acht Formen der Funktion dritter Gattung mit $\int_0^x F(x)\, dx$ bezeichnet, so hat $F(x)$ die Perioden $2K$ und $2iK'$, und man erhält die vorstehenden Ausdrücke unmittelbar mit Hülfe eines allgemeinen Ausdrucks der doppelt periodischen Funktionen, den man am Ende dieses Abrisses entwickeln wird, nämlich:

$$F(x) = C + \Sigma R \frac{H'(x-\zeta)}{H(x-\zeta)},$$

wo die Grössen ζ die Wurzeln der Gleichung $\frac{1}{F(x)} = 0$ bezeichnen und R die bezüglichen Residuen von $F(x)$.

lung nur für Werthe der Variablen stattfindet, deren Modul r als Eins ist, führt die Exponentialgrösse

$$e^{-\int_0^x Z(x)\,dx}$$

er convergenten Entwickelung für jeden reellen und imaginären n von x. Nun wird man aus der Gleichung:

$$Z(x) = \zeta x - \frac{\theta'(x)}{\theta(x)}$$

en:

$$e^{-\int_0^x Z(x)\,dx} = e^{-\zeta\frac{x^2}{2}}\frac{\theta(x)}{\theta(0)}.$$

ist also eine sehr wichtige Eigenschaft der Funktion θ, dass

ch nämlich durch Einführung des Faktors $e^{-\zeta\frac{x^2}{2}}\frac{1}{\theta(0)}$ in eine Funktion verwandelt, wo das Argument nicht mehr unter dem uszeichen steht, und an der Stelle der Periode und der Trans-nte $q = e^{-\frac{\pi K'}{K}}$ der Modul k^2 selbst vorkommt. Gleiches findet bar statt in Bezug auf die drei andern Funktionen:

$$\sin \operatorname{am} x \, e^{-\int_0^x Z(x)\,dx} = e^{-\zeta\frac{x^2}{2}}\frac{H(x)}{\theta(0)}\frac{1}{\sqrt{k}},$$

$$\cos \operatorname{am} x \, e^{-\int_0^x Z(x)\,dx} = e^{-\zeta\frac{x^2}{2}}\frac{H_1(x)}{\theta(0)}\sqrt{\frac{k'}{k}},$$

$$\Delta \operatorname{am} x \, e^{-\int_0^x Z(x)\,dx} = e^{-\zeta\frac{x^2}{2}}\frac{\theta_1(x)}{\theta(0)}\sqrt{k'}.$$

Hieraus folgt, dass neben den periodischen Entwickelungen:

$$\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} = \frac{1}{\sqrt{k}}\,\frac{2\sqrt[4]{q}\sin x - 2\sqrt[4]{q^9}\sin 3x + 2\sqrt[4]{q^{25}}\sin 5x - \ldots}{1 - 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x - 2q^9\cos 6x + \ldots},$$

$$\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} = \sqrt{\frac{k'}{k}}\,\frac{2\sqrt[4]{q}\cos x + 2\sqrt[4]{q^9}\cos 3x + 2\sqrt[4]{q^{25}}\cos 5x + \ldots}{1 - 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x - 2q^9\cos 6x + \ldots},$$

$$\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} = \sqrt{k'}\,\frac{1 + 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x + 2q^9\cos 6x + \ldots}{1 - 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x - 2q^9\cos 6x + \ldots},$$

sich noch eine andere Art der Darstellung zeigt, wo die doppelt periodischen Funktionen durch Quotienten von Reihen ausgedrückt werden, die in Bezug auf x und k^2 rational sind, und für jeden reellen oder imaginären Werth dieser Grössen convergiren. Abel hat die Möglichkeit dieser neuen Entwickelungsweise der elliptischen Funktionen bemerkt und kurz angedeutet, aber Weierstrass kommt die Ehre zu, an Stelle eines blossen Ueberblickes eine tiefe Theorie in die Wissenschaft eingeführt zu haben, welche auf gradem Wege zu diesen neuen Funktionen führt, nicht nur in dem Falle der elliptischen Transcendenten, sondern auch für die Abel'schen mit einer beliebigen Anzahl von Variablen. Wir können hier nicht die Grundlagen angeben, auf welchen die grossen und schönen Entdeckungen dieses berühmten Mathematikers beruhen. Wir beschränken uns hier, ohne über die elliptischen Funktionen hinaus zu gehen, auf die folgenden Angaben.

I. Definition der vier Funktionen Al (x). Differenzialgleichungen.

Um unmittelbar diese Funktionen auf die vier: θ, H, θ_1, H_1, zurückzuführen, setzen wir:

$$
\text{A)}\quad \begin{cases}
\mathrm{Al}\,(x) = e^{-\int_0^x Z\,(x)\,dx}, \\[4pt]
\sin \mathrm{am}\, x = \dfrac{\mathrm{Al}(x)_1}{\mathrm{Al}(x)}, \\[4pt]
\cos \mathrm{am}\, x = \dfrac{\mathrm{Al}(x)_2}{\mathrm{Al}(x)}, \\[4pt]
\Delta\, \mathrm{am}\, x = \dfrac{\mathrm{Al}(x)_3}{\mathrm{Al}(x)},
\end{cases}
$$

und folglich:

$$
\text{B)}\quad \begin{cases}
\mathrm{Al}(x) = e^{-\frac{\zeta x^2}{2}} \dfrac{\theta(x)}{\theta(0)}, \\[4pt]
\mathrm{Al}(x)_1 = e^{-\frac{\zeta x^2}{2}} \dfrac{H(x)}{\theta\,(0)} \dfrac{1}{\sqrt{k}}, \\[4pt]
\mathrm{Al}(x)_2 = e^{-\frac{\zeta x^2}{2}} \dfrac{H_1\,(x)}{\theta\,(0)} \sqrt{\dfrac{k'}{k}}, \\[4pt]
\mathrm{Al}(x)_3 = e^{-\frac{\zeta x^2}{2}} \dfrac{\theta_1(x)}{\theta\,(0)} \sqrt{k'}.
\end{cases}
$$

en Beziehungen A) erhält man zunächst:

$$Al^2(x)_2 = Al^2(x) - Al^2(x)_1,$$
$$Al^2(x)_3 = Al^2(x) - k^2 Al^2(x)_1.$$

kann man aus den Gleichungen:

$$Al(x) = e^{-\int_0^x Z(x)\,dx},$$
$$\frac{Al(x)_1}{Al(x)} = \sin am (x)$$

ifferenzialgleichungen ableiten, indem man zuerst die zweiten ngen der Logarithmen beider Glieder nimmt, nämlich:

$$\frac{d^2 \lg Al(x)}{dx^2} = -k^2 \sin^2 am\, x = -k^2 \frac{Al^2(x)_1}{Al^2(x)}$$

$$\frac{d^2 \lg Al(x)_1}{dx^2} - \frac{d^2 \lg Al(x)}{dx^2} = \frac{d^2 \lg \sin am\, x}{dx^2}$$
$$= k^2 \sin^2 am\, x - \frac{1}{\sin^2 am\, x},$$

mit Hülfe der vorigen Gleichung folgt:

$$\frac{d^2 \lg Al(x)_1}{dx^2} = -\frac{1}{\sin^2 am\, x} = -\frac{Al^2(x)}{Al^2(x)_1}.$$

Entwickelung erhält man folgende Differenzialgleichungen:

$$Al(x)\frac{d^2 Al(x)}{dx^2} - \left[\frac{d\, Al(x)}{dx}\right]^2 + k^2 Al^2(x)_1 = 0,$$

$$Al(x)_1 \frac{d^2 Al(x)_1}{dx^2} - \left[\frac{d\, Al(x)_1}{dx}\right]^2 + Al^2(x) = 0.$$

nliche Weise oder mittelst der algebraischen Relationen er- ich:

$$Al(x)_2 \frac{d^2 Al(x)_2}{dx^2} - \left[\frac{d\, Al(x)_2}{dx}\right]^2 + Al^2(x)_3 = 0,$$

$$Al(x)_3 \frac{d^2 Al(x)_3}{dx^2} - \left[\frac{d\, Al(x)_3}{dx}\right]^2 + k^2 Al^2(x)_2 = 0.$$

ese wichtigen Beziehungen, welche Weierstrass unmittelbar n Definitionsgleichungen:

dx

$$\frac{d \cos \operatorname{am} x}{dx} = -\sin \operatorname{am} x \, \Delta \operatorname{am} x,$$

$$\frac{d \, \Delta \operatorname{am} x}{dx} = -k^2 \sin \operatorname{am} x \cos \operatorname{am} x$$

ableitet und zwar durch eine Methode, welche sich auf die allgemeineren Abel'schen Transcendenten ausdehnen lässt, können dann auf eine neue Art auf die Funktionen θ führen, auch kann man mit ihrer Hülfe direkt beweisen, dass sie Funktionen definiren, welche in immer convergirende Reihen nach Potenzen der Variablen entwickelt werden können, so dass die Coefficienten dieser Reihen ganze Funktionen von k^2 mit rationalen Coefficienten sind. Um indess diese Entwickelungen auszuführen, verfolgt man einen andern einfachern Weg, der in dem Folgenden angedeutet ist.

II. Partielle Differenzialgleichungen, Entwickelungsformeln.

Eine etwas lange Entwickelung, die wir deshalb hier nicht ausführen können, führt Weierstrass auf folgende lineare, partielle Differenzialgleichungen:

$$\frac{d^2 \mathrm{Al}(x)}{dx^2} + 2k^2 x \frac{d \mathrm{Al}(x)}{dx} + 2kk'^2 \frac{d \mathrm{Al}(x)}{dk} + k^2 x^2 \mathrm{Al}(x) = 0,$$

$$\frac{d^2 \mathrm{Al}(x)_1}{dx^2} + 2k^2 x \frac{d \mathrm{Al}(x)_1}{dx} + 2kk'^2 \frac{d \mathrm{Al}(x)_1}{dk} + (k'^2 + k^2 x^2) \mathrm{Al}(x)_1 = 0,$$

$$\frac{d^2 \mathrm{Al}(x)_2}{dx^2} + 2k^2 x \frac{d \mathrm{Al}(x)_2}{dx} + 2kk'^2 \frac{d \mathrm{Al}(x)_2}{dk} + (1 + k^2 x^2) \mathrm{Al}(x)_2 = 0,$$

$$\frac{d^2 \mathrm{Al}(x)_3}{dx^2} + 2k^2 x \frac{d \mathrm{Al}(x)_3}{dx} + 2kk'^2 \frac{d \mathrm{Al}(x)_3}{dk} + (k^2 + k^2 x^2) \mathrm{Al}(x)_3 = 0.$$

Diese wichtigen Gleichungen sind zur Reihenentwickelung ganz besonders geeignet, und man erhält aus ihnen folgende Formeln, wo $n!$ das Produkt von $1.2.3 \ldots n$ bedeutet:

$$\mathrm{Al}(x) = 1 - A_2 \frac{x^4}{4!} + A_3 \frac{x^6}{6!} - \ldots + (-1)^{m-1} A_m \frac{x^{2m}}{(2m)!} \ldots, \text{*)}$$

*) Das mit x^2 multiplicirte Glied fehlt in dieser Entwickelung. Dies zeigt der Ausdruck $e^{-\int_0^x Z(x)\,dx}$ schon a priori, wo die Reihe im Exponenten mit einem Gliede anfängt, das mit x^4 multiplicirt ist.

$$= x - B_1 \frac{x^3}{3!} + B_2 \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^m B_m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!} \cdots,$$

$$= 1 - C_1 \frac{x^2}{2!} + C_2 \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^m C_m \frac{x^{2m}}{(2m)!} \ldots,$$

$$= 1 - D_1 \frac{x^2}{2!} + D_2 \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^m D_m \frac{x^{2m}}{(2m)!} \ldots.$$

n hat aber:

$$k^2,$$

$$(k^2+k^4),$$

$$2(k^2+k^6) + 68k^4,$$

$$28(k^2+k^8) + 480(k^4+k^6),$$

$$12(k^2+k^{10}) + 3008(k^4+k^8) + 5400k^6,$$

$$048(k^2+k^{12}) + 17408(k^4+k^{10}) + 49568(k^6+k^8),$$

$$192(k^2+k^{14}) + 95232(k^4+k^{12}) + 395520(k^6+k^{10})$$
$$+ 603376k^8,$$

$$2768(k^2+k^{16}) + 499712(k^4+k^{14}) + 2853888(k^6+k^{12})$$
$$+ 5668096(k^8+k^{10}),$$

$$31072(k^2+k^{18}) + 2539520(k^4+k^{16}) + 19097600(k^6+k^{14})$$
$$+ 38153728(k^8+k^{12}) + 42090784k^{10},$$

. . . .

$$+ k^2,$$

$$+ k^4 + 4k^2,$$

$$+ k^6 + 9(k^2+k^4),$$

$$+ k^8 + 16(k^2+k^6) - 6k^4,$$

$$+ k^{10} + 25(k^2+k^8) - 494(k^4+k^6),$$

$$+ k^{12} + 36(k^2+k^{10}) - 5781(k^4+k^8) - 12184k^6,$$

$$+ k^{14} + 49(k^2+k^{12}) - 55173(k^4+k^{10}) - 179605(k^6+k^8),$$

$$+ k^{16} + 64(k^2+k^{14}) - 502892(k^4+k^{12}) - 2279488(k^6+k^{10})$$
$$- 3547930k^8,$$

$$+ k^{18} + 81(k^2+k^{16}) - 4537500(k^4+k^{14}) - 27198588(k^6+k^{12})$$
$$- 59331498(k^8+k^{10}),$$

$$+ k^{20} + 100(k^2+k^{18}) - 40856715(k^4+k^{16}) - 31380080(k^6+k^{14})$$
$$- 909015270(k^8+k^{12}) - 1278530856k^{10},$$

. . . .

$$C_1 = 1,$$
$$C_2 = 1+2k^2,$$
$$C_3 = 1+6k^2+8k^4,$$
$$C_4 = 1+12k^2+60k^4+32k^6,$$
$$C_5 = 1+20k^2+348k^4+448k^6+128k^8,$$
$$C_6 = 1+30k^2+2372k^4+4600k^6+2880k^8+512k^{10},$$
$$C_7 = 1+42k^2+19308k^4+51816k^6+45024k^8+16896k^{10}$$
$$+2048k^{12},$$
$$C_8 = 1+56k^2+169320k^4+628064k^6+757264k^8+370944k^{10}$$
$$+93184k^{12}+8192k^{14},$$
$$C_9 = 1+72k^2+1515368k^4+7594592k^6+12998928k^8$$
$$+9100288k^{10}+2725888k^{12}+491520k^{14}+32768k^{16},$$
$$C_{10} = 1+90k^2+13623480k^4+89348080k^6+211064400k^8$$
$$+219361824k^{10}+100242944k^{12}+18450432k^{14}$$
$$+2506752k^{16}+131072k^{18},$$

. . . .

$$D_1 = k^2,$$
$$D_2 = 2k^2+k^4,$$
$$D_3 = 8k^2+6k^4+k^6,$$
$$D_4 = 32k^2+60k^4+12k^6+k^8,$$
$$D_5 = 128k^2+448k^4+348k^6+20k^8+k^{10},$$
$$D_6 = 512k^2+2880k^4+4600k^6+2372k^8+30k^{10}+k^{12},$$
$$D_7 = 2048k^2+16896k^4+45024k^6+51816k^8+69308k^{10}+42k^{12}$$
$$+k^{14},$$
$$D_8 = 8192k^2+93184k^4+370944k^6+757264k^8+628064k^{10}$$
$$+169320k^{12}+56k^{14}+k^{16},$$
$$D_9 = 32768k^2+491520k^4+2725888k^6+9100288k^8+12998928k^{10}$$
$$+7594592k^{12}+1515368k^{14}+72k^{16}+k^{18},$$
$$D_{10} = 131072k^2+2506752k^4+18450432k^6+100242944k^8$$
$$+219361824k^{10}+211064400k^{12}+89348080k^{14}$$
$$+13623480k^{16}+90k^{18}+k^{20},$$

. . . .

Aber die partiellen Differenzialgleichungen dienen nicht allein dazu, die Rechnung, deren Ergebniss hier nach Weierstrass angeführt ist, zu erleichtern, sie geben auch z. B. einen leichten Beweis der folgenden Gleichungen, welche sich auf die Transformation der ersten Ordnung beziehen:

$$\mathrm{Al}\left(kx, \frac{1}{k}\right) = \mathrm{Al}\,(x, k),$$

$$\mathrm{Al}\left(kx, \frac{1}{k}\right)_1 = k\,\mathrm{Al}\,(x, k)_1,$$

$$\mathrm{Al}\left(kx, \frac{1}{k}\right)_2 = \mathrm{Al}\,(x, k)_3,$$

$$\mathrm{Al}\left(kx, \frac{1}{k}\right)_3 = \mathrm{Al}\,(x, k)_2,$$

$$\mathrm{Al}\,(ix, k') = e^{\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{Al}\,(x, k)_2,$$

$$\mathrm{Al}\,(ix, k')_1 = i\,e^{\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{Al}\,(x, k)_1,$$

$$\mathrm{Al}\,(ix, k')_2 = e^{\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{Al}\,(x, k),$$

$$\mathrm{Al}\,(ix, k')_3 = e^{\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{Al}\,(x, k)_3.$$

h bemerken wir, dass, wenn man so von den Funktionen f die Al (x) übergeht, welche den periodischen Charakter loren haben, die Quotienten $\frac{\mathrm{Al}\,(x)_1}{\mathrm{Al}\,(x)}$, $\frac{\mathrm{Al}\,(x)_2}{\mathrm{Al}\,(x)}$, $\frac{\mathrm{Al}\,(x)_3}{\mathrm{Al}\,(x)}$ ihre Periodicität als Folge der nachstehenden Gleichungen haben, nmittelbar sich aus den Gleichungen B) (Seite 86) ergeben, n sich erinnert, dass

$$\zeta = \frac{J}{K}$$

$$KJ' - K'J = \frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Al}\,(x+2K) &= +\,\mathrm{Al}\,(x)\;e^{-2J(x+K)},\\
\mathrm{Al}\,(x+2K)_1 &= -\,\mathrm{Al}\,(x)_1\;e^{-2J(x+K)},\\
\mathrm{Al}\,(x+2K)_2 &= -\,\mathrm{Al}\,(x)_2\;e^{-2J(x+K)},\\
\mathrm{Al}\,(x+2K)_3 &= \mathrm{Al}\,(x)_3\;e^{-2J(x+K)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Al}\,(x+2iK') &= -\,\mathrm{Al}\,(x)\;e^{-2iJ'(x+iK')},\\
\mathrm{Al}\,(x+2iK')_1 &= -\,\mathrm{Al}\,(x)_1\;e^{-2iJ'(x+iK')},\\
\mathrm{Al}\,(x+2iK')_2 &= +\,\mathrm{Al}\,(x)_2\;e^{-2iJ'(x+iK')},\\
\mathrm{Al}\,(x+2iK')_3 &= +\,\mathrm{Al}\,(x)_3\;e^{-2iJ'(x+iK')}.
\end{aligned}$$

J. Entwickelung der elliptischen Funktionen in einfache Reihen nach Sinus und Cosinus.

Es ist dies eine neue Art analytischer Ausdrücke, die sich wesentlich von denjenigen, die wir bis jetzt betrachtet haben, dadurch unterscheidet, dass bei den jetzt folgenden die Variable in gewissen Grenzen bleiben muss; ändern sich diese Grenzen, so ändert sich auch die Form der Entwickelung. Da man indess, um alle reellen und imaginären Werthe des Arguments zu umfassen, nur einer endlichen Anzahl von Entwickelungen bedarf, und übrigens in jedem Intervall die zugehörige Entwickelung für jeden Werth der Perioden und des Modul besteht, so kann man vermuthen, dass die Untersuchung dieser Art von Ausdrücken ebenfalls Gelegenheit geben wird, zu den Grundeigenschaften der neuen Transcendenten zu gelangen. Dies findet wirklich Statt, und auf natürliche Weise gelangt man sogar hierdurch auf die Zurückführung jeder doppelt periodischen Funktion auf elliptische Funktionen, wie es der Liouville'sche Satz, der Seite 5 angeführt wird, ausspricht, und welchen wir danach beweisen werden. Aber unter einem andern Gesichtspunkt und blos durch die Identität der Reihen und der Quotienten von Reihen kommt man auf die verborgensten und wichtigsten Eigenschaften der Zahlen, Eigenschaften, die um so interessanter werden, als sie so unvermutheter Weise sich als in engster Verbindung mit den analytischen Transcendenten stehend ergeben. Wir beschränken uns hier auf diese Andeutung, indem wir auf diese sehr ausgedehnte Seite der Theorie der elliptischen Funktionen, welche auf's Engste mit den schönen Entdeckungen über numerische Funktionen verknüpft ist, welche die Wissenschaft Liouville verdankt, nicht eingehen können.

I. Erste Methode.

Diese folgt naturgemäss aus der Gleichung*):

$$\theta\left(\frac{2Kx}{\pi}\right) = A(1-2q\cos 2x+q^2)\,(1-2q^3\cos 2x+q^6)\,(1-2q^5\cos 2x-q^{10})\,\ldots.$$

Geht man nämlich von der bekannten Entwickelung aus:

---

*) Siehe Seite 17.

$$1-2q\cos 2x+q^2) = q\cos 2x + q^2\frac{\cos 4x}{2} + q^3\frac{\cos 6x}{3} + q^4\frac{\cos 8x}{4} + \dots,$$

sich:

$$\frac{2Kx}{\pi}\Big) = \text{const} - \cos 2x\,(q+q^3+q^5+\dots) - \frac{\cos 4x}{2}(q^2+q^6+q^{10}+\dots) - \frac{\cos 6x}{3}(q^3+q^9+q^{15}+\dots) - \frac{\cos 8x}{4}(q^4+q^{12}+q^{20}+\dots)\dots.$$

$$\frac{2Kx}{\pi}\Big) = \text{const} - \frac{q\cos 2x}{1-q^2} - \frac{q^2\cos 4x}{2(1-q^4)} - \frac{q^3\cos 6x}{3(1-q^6)} - \frac{q^4\cos 8x}{4(1-q^8)} - \dots.$$

us findet man die Entwickelung der Funktionen zweiter r Gattung mittelst der Gleichungen:

$$\Pi(x, a) = x\frac{\theta'(a)}{\theta(a)} + \frac{1}{2}\lg\frac{\theta(x-a)}{\theta(x+a)},$$

$$Z(x) = \zeta x - \frac{\theta'(x)}{\theta(x)}.$$

en nämlich:

$$, \frac{2Ka}{\pi}\Big) = \frac{2Kx}{\pi}\frac{\theta'\left(\frac{2Ka}{\pi}\right)}{\theta\left(\frac{2Ka}{\pi}\right)} + \frac{q\cos 2(x+a)}{1-q^2} + \frac{q^2\cos 4(x+a)}{2(1-q^4)} + \dots - \frac{q\cos 2(x-a)}{1-q^2} - \frac{q^2\cos 4(x-a)}{2(1-q^4)} - \dots$$

$$\frac{\theta'\left(\frac{2Ka}{\pi}\right)}{\theta\left(\frac{2Ka}{\pi}\right)} - 2\left[\frac{q\sin 2a\sin 2x}{1-q^2} + \frac{q^2\sin 4a\sin 4x}{2(1-q^4)} + \frac{q^3\sin 6a\sin 6x}{3(1-q^6)} + \dots\right]$$

$$\frac{K}{2\pi} Z\left(\frac{2Kx}{\pi}\right) = \frac{\zeta K}{\pi^2}\, x - \left[\frac{q \sin 2x}{1-q^2} + \frac{q^2 \sin 4x}{1-q^4} + \frac{q^3 \sin 6x}{1-q^6} + \dots\right].$$

Indem man die letztere Gleichung in Bezug auf x differenziirt, erhält man noch:

$$\frac{k^2 K^2}{2\pi^2} \sin^2 \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi} = \frac{\zeta K^2}{2\pi^2} - \left[\frac{q \cos 2x}{1-q^2} + \frac{2q^2 \cos 4x}{1-q^4} + \frac{3q^3 \cos 6x}{1-q^6} + \dots\right].$$

Indess wollen wir auf sin am x, cos am x, Δ am x kommen, und dasselbe Verfahren muss dann anwendbar sein, wenn man diese Funktionen unter die Form logarithmischer Ableitungen von solchen Ausdrücken bringen kann, die wie θ (x) sich in Faktoren zerlegen lassen. Aber man hat wirklich:

$$k \sin \operatorname{am} x = \frac{d \lg (\Delta \operatorname{am} x - k \cos \operatorname{am} x)}{dx},$$

$$ik \cos \operatorname{am} x = \frac{d \lg (\Delta \operatorname{am} x + ik \sin \operatorname{am} x)}{dx},$$

$$i \Delta \operatorname{am} x = \frac{d \lg (\cos \operatorname{am} x + i \sin \operatorname{am} x)}{dx}.$$

Die Grössen unter dem logarithmischen Zeichen lassen sich aber folgendermassen ausdrücken:

$$\Delta \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi} - k \cos \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi}$$
$$= \frac{(1-2\sqrt{q}\cos x+q)(1-2\sqrt{q^3}\cos x+q^3)(1-2\sqrt{q^5}\cos x+q^5)\dots}{(1+2\sqrt{q}\cos x+q)(1+2\sqrt{q^3}\cos x+q^3)(1+2\sqrt{q^5}\cos x+q^5)\dots},$$

$$\Delta \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi} + ik \sin \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi}$$
$$= \frac{(1-2\sqrt{-q}\sin x-q)(1-2\sqrt{-q^3}\sin x-q^3)(1-2\sqrt{-q^5}\sin x-q^5)\dots}{(1+2\sqrt{-q}\sin x-q)(1+2\sqrt{-q^3}\sin x-q^3)(1+2\sqrt{-q^5}\sin x-q^5)\dots},$$

$$\cos \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi} + i \sin \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi}$$
$$= \frac{e^{2ix}(1-q e^{-2ix})(1-q^3 e^{2ix})(1-q^5 e^{-2ix})\dots}{(1-q e^{2ix})(1-q^3 e^{-2ix})(1-q^5 e^{2ix})\dots}.$$

Eine der vorigen ganz ähnliche Rechnung führt dann zu folgenden Formeln:

$$\mathrm{am}\,\frac{2Kx}{\pi} = \frac{\sqrt{q}\sin x}{1-q} + \frac{\sqrt{q^3}\sin 3x}{1-q^3} + \frac{\sqrt{q^5}\sin 5x}{1-q^5} + \ldots,$$

$$\mathrm{am}\,\frac{2Kx}{\pi} = \frac{\sqrt{q}\cos x}{1+q} + \frac{\sqrt{q^3}\cos 3x}{1+q^3} + \frac{\sqrt{q^5}\cos 5x}{1+q^5} + \ldots,$$

$$\mathrm{am}\,\frac{2Kx}{\pi} = \frac{1}{4} + \frac{q\cos 2x}{1+q^2} + \frac{q^2\cos 4x}{1+q^4} + \frac{q^3\cos 6x}{1+q^6} + \ldots.$$

Ausdrücke für die Grössen:

$$\Delta\,\mathrm{am}\,x - k\cos\mathrm{am}\,x,$$

$$\Delta\,\mathrm{am}\,x + ik\sin\mathrm{am}\,x,$$

$$\cos\mathrm{am}\,x + i\sin\mathrm{am}\,x$$

, deren wir uns hier bedient haben, so beschränken wir uns nen zu beweisen, da dieselbe Methode auch zu den andern d wollen wir dazu den letzten wählen, da die vorhergehenden len Fundamenta finden, denn sie ergeben sich aus der g 5) Seite 86 daselbst, wenn man für den ersten x in

ür den zweiten q in $-q$ verwandelt.

dem Ende sei zunächst, wie auf Seite 16:

$$\varphi(x) = 1 - e^{\frac{i\pi x}{K}}$$

Ausdruck, von dem wir beweisen wollen, dass er gleich:

$$\cos\mathrm{am}\,x + i\sin\mathrm{am}\,x$$

nt die Form an:

$$\frac{e^{\frac{i\pi x}{2K}}\varphi(-x+iK')\,\varphi(x+3iK')\,\varphi(-x+5iK')\ldots}{\varphi(x+iK')\,\varphi(-x+3iK')\,\varphi(x+5iK')\ldots}.$$

ht hieraus, dass, wenn man Zähler und Nenner mit:

$$A\,\varphi(-x+iK')\,\varphi(x+3iK')\,\varphi(-x+5iK')\ldots$$

irt, wo A eine Constante ist, man den Ausdruck auf eine ringt, wo Θ (x) den Nenner bildet. Setzen wir also:

$$= A\,e^{\frac{i\pi x}{K}}\varphi^2(-x+iK')\,\varphi^2(x+3iK')\,\varphi^2(-x+5iK')\ldots,$$

ffenbar:

$$\Phi(x+2K) = -\Phi(x),$$

serdem:

$$\Phi(x+4iK') = \Phi(x)\, q^2 \frac{\varphi^2(-x-3iK')}{\varphi^2(x+3iK')} = \Phi(x)\, e^{-\frac{2i\pi}{K}(x+2iK')}.$$

Den beiden Gleichungen:

$$\Phi(x+2K) = -\Phi(x),$$

$$\Phi(x+4iK') = \Phi(x)\, e^{-\frac{2i\pi}{K}(x+2iK')}$$

wird aber durch ganze Funktionen in allgemeinster Weise genügt, wenn man nimmt:

$$\Phi(x) = C\, H(x) + C_1\, H_1(x),$$

derart, dass man setzen kann:

$$\frac{e^{\frac{i\pi x}{2K}} \varphi(-x+iK')\, \varphi(x+3iK')\, \varphi(-x+5iK') \dots}{\varphi(x+iK')\, \varphi(-x+3iK')\, \varphi(x+5iK') \dots}$$

$$= \frac{C\, H(x) + C_1\, H_1(x)}{\theta(x)} = A \cos \operatorname{am} x + i B \sin \operatorname{am} x,$$

wo A und B Constanten sind, die man durch einen besondern Fall bestimmt. Ist z. B. $x = 0$ und $x = K$, so erhält man ohne Weiteres $A = 1$, $B = 1$, wodurch unsere Formel bewiesen ist. —

Bei dieser Gelegenheit wollen wir noch bemerken, dass die allgemeinste Art, den Gleichungen:

$$\Phi(x+4K) = \Phi(x),$$

$$\Phi(x+4iK') = \Phi(x)\, e^{-\frac{2i\pi}{K}(x+4iK')},$$

welche die vorstehenden in sich schliessen, durch ganze Funktionen Genüge zu leisten, gefunden wird, wenn man mit vier beliebigen Constanten setzt:

$$\Phi(x) = A\,\theta(x) + B\,H(x) + C\,\theta_1(x) + D\,H_1(x).$$

Dieser Ausdruck, von dem man mittelst der Beziehungen auf Seite 28 von vorn herein sieht, dass er eine Auflösung giebt, ist in der That der allgemeinste. Denn setzt man:

$$\Phi(x) = \sum a_m\, e^{\frac{mi\pi x}{2K}},$$

oder vielmehr:

$$\Phi(x) = \sum a_m\, q^{\frac{m^2}{4}}\, e^{\frac{mi\pi x}{2K}},$$

e zweite der Bedingungen zu dem Ausdruck:

$$a_{m+4} = a_m,$$

dem Ausdrucke von Φ (x) nur vier Constanten vor-
önnen.

dnung der vorstehenden Reihen nach Potenzen von q.

Entwickelungen sind unmittelbar durch das Vorstehende
So erhielt man z. B., ehe man die geometrischen Pro-
summirte:

$$
\begin{aligned}
\text{n am} \frac{2Kx}{\pi} &= \sin x \sqrt{q}\,(1 + q + q^2 + \ldots) \\
&+ \sin 3x \sqrt{q^3}\,(1 + q^3 + q^6 + \ldots) \\
&+ \sin 5x \sqrt{q^5}\,(1 + q^5 + q^{10} + \ldots) + \ldots \\
&= \sin x \sum \sqrt{q^{2m+1}} \\
&+ \sin 3x \sum \sqrt{q^{3\,(2m+1)}} \\
&+ \sin 5x \sum \sqrt{q^{5\,(2m+1)}} + \ldots,
\end{aligned}
$$

der Form einer Doppelsumme:

$$\sin \text{am} \frac{2Kx}{\pi} = \sum \sin(2\mu + 1) \sqrt{q^{(2\mu+1)(2m+1)}}.$$

wir also:

$$(2\mu + 1)(2m + 1) = M,$$

I alle ungraden Zahlen vor, und der Coefficient eines
Gliedes $\sqrt{q^M}$ in der Reihe wird die Summe aller Grössen
1) x sein, wo $2\mu + 1$ ein Faktor von M ist. Da aber
or einer ungraden Zahl selbst ungrade ist, so kann man
reiben, indem man unter μ einen Faktor von M versteht:

$$\frac{kK}{2\pi} \sin \text{am} \frac{2Kx}{\pi} = \sum \sqrt{q^M} \sum \sin \mu x.$$

anz ähnliche Weise erhält man:

$$\text{m} \frac{2Kx}{\pi} = \sum (-1)^{\frac{M-1}{2}} \sqrt{q^M} \sum (-1)^{\frac{\mu-1}{2}} \cos \mu x.$$

Was Δ am x anbetrifft, so bezeichne man durch

$$N = 2^\nu M$$

eine beliebige ganze Zahl, wo 2^ν die höchste darin als Faktor enthaltene Potenz von 2 ist, so dass also M ungrade ist, man hat dann:

$$\frac{K}{2\pi}\Delta \mathrm{am}\frac{2Kx}{\pi} = \frac{1}{4} + \sum (-1)^{\frac{M-1}{2}} q^N \sum (-1)^{\frac{\mu-1}{2}} \cos 2^{\nu+1}\mu x,$$

wo μ wie vorhin jeden Faktor der ungraden Zahl M andeutet. Höchst überraschend ist der zahlentheoretische Charakter dieser Ausdrücke:

$$\sum \sin \mu x,$$

$$\sum (-1)^{\frac{\mu-1}{2}} \cos \mu x,$$

$$\sum (-1)^{\frac{\mu-1}{2}} \cos 2^{\nu+1} \mu x;$$

sie bieten ein Beispiel der numerischen Funktionen dar, welche den Gegenstand der schönen Liouville'schen Untersuchungen bilden, und die einfache Art, durch die man mittelst der Theorie der elliptischen Funktionen auf sie geräth, lässt leicht die Wichtigkeit, welche diese Theorie für die Untersuchung der Eigenschaften der Zahlen hat, ahnen.

III. Beweis der fundamentalen Differenzialgleichungen.

Bezeichnen wir mit m und m' alle ungraden positiven und negativen Zahlen, durch n alle ganzen graden und ungraden Zahlen, und setzen wir:

$$U = \sum \frac{\sqrt{q^m}\, e^{mix}}{1 - q^m},$$

$$V = \sum \frac{\sqrt{q^{m'}}\, e^{m'ix}}{1 + q^m},$$

$$W = \sum \frac{q^n\, e^{2nix}}{1 + q^{2n}},$$

so hat man:

$$\frac{ikK}{\pi}\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} = U,$$

$$\frac{kK}{\pi}\cos\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} = V,$$

$$\frac{K}{\pi}\Delta\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} = W.$$

sprechen dann den Gleichungen:

$$\frac{d\sin\operatorname{am}x}{dx} = \cos\operatorname{am}x\,\Delta\operatorname{am}x,$$

$$\frac{d\cos\operatorname{am}x}{dx} = -\sin\operatorname{am}x\,\Delta\operatorname{am}x,$$

$$\frac{d\Delta\operatorname{am}x}{dx} = -k^2\sin\operatorname{am}x\cos\operatorname{am}x$$

genden:

$$\frac{dU}{dx} = 2iVW,$$

$$\frac{dV}{dx} = 2iUW,$$

$$\frac{dW}{dx} = 2iUV,$$

wir hier beweisen wollen. Zu dem Ende betrachten wir hier
dukte:

$$VW = \sum \frac{q^{\frac{m'+2n}{2}}e^{(m'+2n)ix}}{(1+q^{m'})(1+q^{2n})},$$

$$UW = \sum \frac{q^{\frac{m+2n}{2}}e^{(m+2n)ix}}{(1-q^{m})(1+q^{2n})},$$

$$UV = \sum \frac{q^{\frac{m+m'}{2}}e^{(m+m')ix}}{(1-q^{m})(1+q^{m'})},$$

merkt man, dass identisch ist:

$$\frac{q^{\frac{m'+2n}{2}}}{(1+q^{m'})(1+q^{2n})} = \frac{q^{\frac{m'+2n}{2}}}{1-q^{m'+2n}}\left(\frac{1}{1+q^{m'}} - \frac{q^{2n}}{1+q^{2n}}\right),$$

$$\frac{q^{\frac{m+2n}{2}}}{(1-q^m)(1+q^{2n})} = \frac{q^{\frac{m+2n}{2}}}{1+q^{m+2n}}\left(\frac{1}{1-q^m} - \frac{q^{2n}}{1+q^{2n}}\right),$$

$$\frac{q^{\frac{m+m'}{2}}}{(1-q^m)(1+q^{m'})} = \frac{q^{\frac{m+m'}{2}}}{1+q^{m+m'}}\left(\frac{1}{1-q^m} - \frac{q^{m'}}{1+q^{m'}}\right),$$

und setzt man:

$$m+2n = M,$$

$$m'+2n = M',$$

$$m+m' = 2N,$$

derart, dass M und M' ungrade, N eine beliebige ganze Zahl ist; man kann dann schreiben:

$$VW = \sum \frac{\sqrt{q^{M'}}\, e^{M'ix}}{1-q^{M'}}\left(\frac{1}{1+q^{m'}} - \frac{q^{M'-m'}}{1+q^{M'-m'}}\right),$$

$$UW = \sum \frac{\sqrt{q^{M}}\, e^{Mix}}{1+q^{M}}\left(\frac{1}{1-q^{m}} - \frac{q^{M-m}}{1+q^{M-m}}\right),$$

$$UV = \sum \frac{q^{N} e^{2Nix}}{1+q^{2N}}\left(\frac{1}{1-q^{m}} - \frac{q^{2N-m}}{1+q^{2N-m}}\right).$$

Vergleicht man diese Ausdrücke bezüglich mit $\frac{dU}{dx}$, $\frac{dV}{dx}$, $\frac{dW}{dx}$, so sieht man, dass, um unsere Differenzialgleichung zu beweisen, man zeigen muss, dass folgende Beziehungen stattfinden, wo die Accente weggelassen sind:

$$M = 2\sum\left(\frac{1}{1+q^m} - \frac{q^{M-m}}{1+q^{M-m}}\right),$$

$$M = 2\sum\left(\frac{1}{1-q^m} - \frac{q^{M-m}}{1+q^{M-m}}\right),$$

$$N = \sum\left(\frac{1}{1-q^m} - \frac{q^{2N-m}}{1+q^{2N-m}}\right).$$

Das Verfahren ist für alle drei Gleichungen dasselbe; wir betrachten, um einen bestimmten Fall vor Augen zu haben, die erste. Unterscheiden wir aber von einander die positiven und negativen Werthe von m. Die ersten führen zu dem Ausdruck:

$$\sum\left(\frac{1}{1+q^m} - \frac{q^{M-m}}{1+q^{M-m}}\right),$$

wir, indem wir M uns als positiv vorstellen, schreiben:

$$\sum \frac{q^{m-M}}{1+q^{m-M}} - \frac{q^m}{1+q^m}\Big),$$

identischen Beziehungen:

$$\frac{1}{1+q^m} = 1 - \frac{q^m}{1+q^m},$$

$$\frac{q^{M-m}}{1+q^{M-m}} = 1 - \frac{q^{m-M}}{1+q^{m-M}}$$

den, die letztern, indem man $-m$ für m setzt, zu dem fol-
n:

$$\sum\left(\frac{1}{1+q^{-m}} - \frac{q^{M+m}}{1+q^{M+m}}\right) = \sum\left(\frac{q^m}{1+q^m} - \frac{q^{M+m}}{1+q^{M+m}}\right)$$

, dass man für die ganze Summe hat:

$$\sum \frac{q^{m-M}}{1+q^{m-M}} - \sum \frac{q^{m+M}}{1+q^{m+M}}.$$

$m = 2\,M + 1$ an aber sind alle Glieder der ersten Summe
die zweite mit umgekehrten Vorzeichen gegeben und ver-
den also. So hat man demnach eine endliche Reihe:

$$\sum_{m=1}^{m=2M-1} \frac{q^{m-M}}{1+q^{m-M}}.$$

be trennen wir in zwei andere und schreiben das mittlere
ausserhalb des Summenzeichens; dies giebt:

$$\sum_{m=1}^{m=M-2} \frac{q^{m-M}}{1+q^{m-M}} + \frac{1}{2} + \sum_{m=M+2}^{m=2M-1} \frac{q^{m-M}}{1+q^{m-M}}.$$

bt man aber $\frac{1}{1+q^{M-m}}$ statt $\frac{q^{m-M}}{1+q^{m-M}}$, so wird die erste Summe:

$$\frac{1}{1+q^2} + \frac{1}{1+q^4} + \cdots + \frac{1}{1+q^{M-1}},$$

dem man die Glieder derselben bezüglich zu denen der zweiten
addirt, d. h. zu:

$$\frac{q^2}{1+q^2} + \frac{q^4}{1+q^4} + \cdots + \frac{q^{M-1}}{1+q^{M-1}},$$

an die Einheit so oft, als die Anzahl der Glieder beträgt,

d. h. $\frac{M-1}{2}$ mal, hierzu das mittlere Glied $\frac{1}{2}$ addirt, erhält man endlich:

$$\frac{1}{2}+\frac{M-1}{2}=\frac{M}{2},$$

und dies ist das vorhin angegebene Ergebniss.

Nehmen wir endlich an, M sei negativ, so bemerken wir, dass der von uns betrachtete Ausdruck mit M sein Zeichen wechselt, so dass man hat:

$$\sum\left(\frac{1}{1+q^m}-\frac{q^{M-m}}{1+q^{M-m}}\right)=-\sum\left(\frac{1}{1+q^m}-\frac{q^{-M-m}}{1+q^{-M-m}}\right).$$

In der That, setzt man im ersten Gliede $m+M$ für m, so erhält man identisch das allgemeine Glied der rechtsstehenden Reihe. — Wir haben hier an einem wichtigen Beispiele gezeigt, in welcher Art die neuen Entwickelungen ganz wie diejenigen, von denen wir bei Darstellung der Theorie ausgegangen sind, zu den Grundeigenschaften der elliptischen Funktionen führen können. Jetzt wollen wir die Vergleichung zwischen beiden Arten von Ausdrücken unter einem allgemeineren Gesichtspunkte auffassen, indem wir eine beliebige eindeutige doppelt periodische Funktion in eine einfache periodische Reihe entwickeln.

IV. Entwickelung einer doppelt periodischen Funktion in Sinus- und Cosinus-Reihen.

Sei F (z) die betrachtete Funktion, a und b ihre Perioden. Wir werden zunächst die Grenzen der Variablen aufsuchen, in welchen diese Funktion jedesmal durch eine bestimmte Sinus- und Cosinus-Reihe entwickelt wird, welche z. B. der Periode a entspricht. — Bemerken wir zu dem Ende, dass der Ausdruck:

$$z=at+bu,$$

wo t und u reell sind, jede complexe Grösse vorstellen kann, und dass, um alle Werthe, welche F (z) annehmen kann, zu erhalten, es in Anbetracht der doppelten Periodicität hinreicht, t und u alle reellen Werthe zwischen Null und Eins zu geben. Diese Bemerkung wenden wir auf die Wurzeln ζ der Gleichung $\frac{1}{F(z)}=0$ an, wovon die Bestimmungen, welche wir im Auge haben, abhängen;

…nnen sie durch ζ_1, ζ_2 . . . ζ_s, indem wir sie derart ordnen,
u von Null bis Eins wachsen lassen, so dass ζ_s dem
…n $u = u_s$ entspricht. Sei jetzt υ_s eine zwischen u_s und
…nde Grösse*), wobei die Grenzwerthe ausgeschlossen sind;
…uck:

$$F\ (at + b\upsilon_s)$$

… für keinen reellen Werth von t unendlich werden und
…h folgendermassen entwickeln lassen:

$$F\ (at + b\upsilon_s) = \sum A_m^{(s)}\, e^{2mi\pi t},$$

…ir jeden Werth dieser Variablen convergirt. Ist also die
…er Grössen ζ_s endlich und gleich μ, so werden die Reihen:

$$\sum A_m^{(1)}\, e^{2mi\pi t},$$

$$\sum A_m^{(2)}\, e^{2mi\pi t},$$

. . . .

$$\sum A_m^{(\mu)}\, e^{2mi\pi t}$$

…Gesammtheit die Funktion F (z) für $z = at + bu$ dar-
…vorin t ganz beliebig, u kleiner als 1 ist, wo aber die

$$at + bu_1,$$

$$at + bu_2,$$

. . . . .

$$at + bu_\mu$$

…ossen sind. Und wenn man dieselben Reihen periodisch
…, indem man u von Eins bis in's Unendliche wachsen und
… bis zum negativ Unendlichen abnehmen lässt, so wird man
…en Umfang der complexen Werthe des Arguments um-
…d mit den angegebenen Ausnahmen eine vollständige Dar-
…der Funktion gewonnen haben. Nachdem dies festgestellt
… wir die Grössen A_m bestimmen. Zu dem Ende werden
…rundprinzip der Residuenrechnung anwenden, welches in
…nung besteht:

…e Grösse υ_1 kann nicht allein als zwischen u_1 und 0, sondern
…wischen 0 und dem numerisch kleinsten negativen Werthe von
… angenommen werden.

wo das erste Glied das Integral einer eindeutigen Funktion $f(z)$ vorstellt, und zwar auf einem beliebigen geschlossenen Umfange genommen, und Δ die Summe der Residuen von $f(z)$ für alle Werthe der Veränderlichen, welche Punkten innerhalb dieses Umfanges entsprechen.

Dieser Cauchy'sche Satz auf den Fall angewandt, wo der Umfang ein Parallelogramm ist, dessen Eckpunkte den Grössen entsprechen:

$$p, \quad p + a, \quad p + a + b, \quad p + b,$$

und dessen Seiten folgende Gleichungen haben, wo die Veränderliche t von Null bis Eins wächst:

$$z = p + at.$$
$$z = p + a + bt,$$
$$z = p + b + a(1-t),$$
$$z = p + b(1-t),$$

giebt:

$$\begin{aligned} & a \int_0^1 f(p+at)\,dt + b \int_0^1 f(p+a+bt)\,dt \\ & - a \int_0^1 f[p+b+a(1-t)]\,dt - b \int_0^1 f[p+b(1-t)]\,dt = 2i\pi\Delta, \end{aligned}$$

oder einfacher:

$$1) \quad \left\{ \begin{aligned} & a \int_0^1 f(p+at)\,dt + b \int_0^1 f(p+a+bt)\,dt \\ & - a \int_0^1 f(p+b+at)\,dt - b \int_0^1 f(p+bt)\,dt = 2i\pi\Delta. \end{aligned} \right.$$

Im Uebrigen stellt nach der obigen Bezeichnung Δ die Summe der Residuen von $f(z)$ für alle Wurzeln ζ der Gleichung $\frac{1}{f(z)} = 0$ dar, welche durch die Formel:

$$\zeta = p + at + bu$$

dargestellt werden können, wo t und u zwischen Null und Eins liegen. Die Gleichung

$$F(at + b\upsilon_1) = \sum A_m^{(1)} e^{2mi\pi t}$$

giebt:

---

*) Vergleiche den Anhang. D. U.

$$A_m^{(1)} = \int_0^1 F(at + b\upsilon_1)\, e^{-2mi\pi t}\, dt,$$

können also die Beziehung 1) anwenden, indem wir setzen:

$$p = b\upsilon_1,$$

$$f(z) = F(z)\, e^{-2mi\pi \frac{z - b\upsilon_1}{a}}.$$

hat dann offenbar:

$$f(z+a) = f(z),$$

$$f(z+b) = f(z)\, q^{-2m},$$

wie an einer früheren Stelle,

$$q = e^{i\pi \frac{b}{a}}$$

Das erste Glied der Gleichung 1) reducirt sich also auf:

$$a\, A_m^{(1)} (1 - q^{-2m}).$$

Was das zweite Glied, d. h. die Residuumsumme der Funktion

$$F(z)\, e^{-2mi\pi \frac{z - b\upsilon_1}{a}}$$

$$z = \zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_\mu$$

etrifft, so wollen wir der Einfachheit wegen annehmen, dass e Grössen einfache Wurzeln der Gleichung $\frac{1}{F(z)} = 0$ seien; eichnet man dann durch R_s die Grenze von $\varepsilon F(\zeta_s + \varepsilon)$ für $= 0$, so findet man unmittelbar:

$$= e^{2mi\pi \frac{b\upsilon_1}{a}} \left(R_1 e^{-2mi\pi \frac{\zeta_1}{a}} + R_2 e^{-2mi\pi \frac{\zeta_2}{a}} + \ldots + R_\mu e^{-2mi\pi \frac{\zeta_\mu}{a}} \right).$$

die gesuchte Entwickelung der Funktion $F(z)$ für $z = at + b\upsilon_1$ also die Form:

$$) = \text{const} + \frac{2i\pi}{a} \left[R_1 \sum \frac{e^{2m\frac{i\pi}{a}(z-\zeta_1)}}{1 - q^{-2m}} + R_2 \sum \frac{e^{2m\frac{i\pi}{a}(z-\zeta_2)}}{1 - q^{-2m}} + \ldots \right.$$

$$\left. + R_\mu \sum \frac{e^{2m\frac{i\pi}{a}(z-\zeta_\mu)}}{1 - q^{-2m}} \right].$$

Wir haben eine willkürliche Constante hinzugefügt und dafür in jeder Summe das Glied, welches $m = 0$ entspricht, weggelassen. In der That kann für diesen Fall $A_0^{(1)}$ nicht durch Gleichung:

$$a\, A_m^{(1)} (1 - q^{-2m}) = 2 i \pi \Delta$$

bestimmt werden, sie giebt eben nur $\Delta = 0$, d. h.:

$$R_1 + R_2 + \ldots + R_\mu = 0.$$

Bevor wir jedoch weiter gehen, wollen wir eine Anwendung von der eben erhaltenen Formel machen, indem wir $F(z) = \sin am\, z$ setzen. Sei dann

$$a = 4\, K,$$
$$b = 2\, i\, K',$$

so hat man:

$$\zeta_1 = i\, K',$$
$$\zeta_2 = i\, K' + 2\, K,$$
$$R_1 = \lim\, [\varepsilon \sin am\, (i\, K' + \varepsilon)] = \frac{1}{k},$$
$$q = e^{-\frac{\pi K'}{2K}} = \sqrt{q},$$

und folglich:

$$\sin am\, z = \frac{i\pi}{2kK} \left[\sum \frac{e^{m \frac{i\pi}{2K}(z - iK')}}{1 - q^{-m}} - \sum \frac{e^{m \frac{i\pi}{2K}(z - iK' - 2K)}}{1 - q^{-m}} \right] + \text{const}.$$

$$= \frac{i\pi}{2kK} \sum e^{m \frac{i\pi z}{2K}} \frac{\sqrt{q^{-m}}}{1 - q^{-m}} [1 - (-1)^m] + \text{const.}$$

Man sieht, dass nur die ungraden Werthe von m bestehen bleiben, so dass, wenn man die Constante gleich Null setzt, man unmittelbar erhält:

$$\frac{i k K}{\pi} \sin am \frac{2 K z}{\pi} = \sum e^{m i \pi z} \frac{\sqrt{q^m}}{1 - q^m}.$$

Hier steht also im zweiten Gliede die Reihe, welche wir mit U bezeichnet haben (Seite 98).

Kehren wir jetzt zu den allgemeinen Betrachtungen zurück, namentlich zu den Entwickelungen, welche für $z = at + b\omega_1$ und $z = at + b\omega_2$ stattfinden. Im ersten Falle beziehen sich die Residuen auf die Werthe $\zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_\mu$; geht man auf das folgende Intervall über, das durch die Gleichung $z = at + b\omega_2$ gegeben ist, so erhält man die Reihe: $\zeta_2, \zeta_3 \ldots \zeta_\mu, \zeta_1 + b$, und da die Re-

von F (z) in Bezug auf ζ_1 und $\zeta_1 + b$ gleich sind, so geben beiden Entwickelungen mit Hinzufügung der constanten Glieder:

$$= \int_0^1 F(at + b\upsilon_1)\, dt + \frac{2i\pi}{a} R_1 \sum \frac{e^{2m\frac{i\pi}{a}(z-\zeta_1)}}{1-q^{-2m}}$$
$$+ \frac{2i\pi}{a} R_2 \sum \frac{e^{2m\frac{i\pi}{a}(z-\zeta_2)}}{1-q^{-2m}} + \ldots$$

$$= \int_0^1 F(at + b\upsilon_2)\, dt + \frac{2i\pi}{a} R_1 \sum \frac{e^{2m\frac{i\pi}{a}(z-\zeta_1-b)}}{1-q^{-2m}}$$
$$+ \frac{2i\pi}{a} R_2 \sum \frac{e^{2m\frac{i\pi}{a}(z-\zeta_2)}}{1-q^{-2m}} + \ldots$$

ir haben also die constanten Glieder zu vergleichen. Wir n uns zu diesem Ende der schon benutzten Gleichung, inir darin die Periode b durch eine beliebige Grösse β er- also:

$$F(p+at)\, dt + \beta \int_0^1 F(p+a+\beta t)\, dt - a\int_0^1 F(p+\beta+at)\, dt$$
$$- \beta \int_0^1 F(p+\beta t)\, dt = 2 i\pi \Delta.$$

tzen wir $p = b\upsilon_1$, $p + \beta = b\upsilon_2$, so giebt Δ nur ein ein-Residuum von F (z), das nämlich, welches $z = \zeta_1$ entspricht, n hat unmittelbar:

$$\int_0^1 F(at + b\upsilon_1)\, dt - \int_0^1 F(at + b\upsilon_2)\, dt = \frac{2i\pi}{a} R_1.$$

nnen also beide Entwickelungen so darstellen, dass sie aus enselben analytischen Elementen bestehen, so dass, wenn die t:

$$\frac{2i\pi}{a} R_1 \sum \frac{e^{2m\frac{i\pi}{a}(z-\zeta_1)}}{1-q^{-2m}} + \frac{2i\pi}{a} R_2 \sum \frac{e^{2m\frac{i\pi}{a}(z-\zeta_2)}}{1-q^{-2m}} + \ldots$$
$$+ \frac{2i\pi}{a} R_\mu \sum \frac{e^{2m\frac{i\pi}{a}(z-\zeta_\mu)}}{1-q^{-2m}},$$

ere sich nach Vereinigung der Glieder, welche R_1 haben, so en lässt:

$$C+\frac{2i\pi}{a}R_1\left[\sum\frac{e^{2m\frac{i\pi}{a}(z-\zeta_1-b)}}{1-q^{-2m}}-1\right]+\frac{2i\pi}{a}R_2\sum\frac{e^{2m\frac{i\pi}{a}(z-\zeta_2)}}{1-q^{-2m}}+\dots$$
$$+\frac{2i\pi}{a}R_\mu\sum\frac{e^{2m\frac{i\pi}{a}(z-\zeta_\mu)}}{1-q^{-2m}}.$$

Hieraus lässt sich eine wichtige Folgerung ziehen, die Dasjenige rechtfertigen wird, was oben über die Funktionen zweiter Gattung gesagt wurde. — Bemerken wir nämlich, dass die verschiedenen Summen, welche in R_1, R_2 u. s. w. multiplicirt sind, allein aus der Entwickelung:

$$\sum\frac{e^{2m\frac{i\pi z}{a}}}{1-q^{-2m}}$$

hervorgehen, wenn man darin $z-\zeta_1$, $z-\zeta_2$ u. s. w., im zweiten Falle aber $z-\zeta_1-b$ u. s. w. für z setzt. Setzt man nun $z-\frac{b}{2}$ für z, so nimmt diese Entwickelung die Form an:

$$\sum\frac{q^{-m}\,e^{2m\frac{i\pi z}{a}}}{1-q^{-2m}}.$$

Diese erinnert uns an einen schon bekannten analytischen Ausdruck. Sei nämlich $a=2K$, $b=2iK'$, folglich $q=q$, so hat man:

$$\frac{\theta'(z)}{\theta(z)}=\frac{i\pi}{K}\sum\frac{q^{-m}\,e^{m\frac{i\pi z}{K}}}{1-q^{-2m}}=\frac{2\pi}{K}\sum_{1}^{\infty}{}_m\,\frac{q^m}{1-q^{2m}}\sin\frac{m\pi z}{K};$$

man kann also für $z=at+b\upsilon_1$ setzen:

$$F(z-iK')=C+R_1\frac{\theta'(z-\zeta_1)}{\theta(z-\zeta_1)}+R_2\frac{\theta'(z-\zeta_2)}{\theta(z-\zeta_2)}+\dots$$
$$+R_\mu\frac{\theta'(z-\zeta_\mu)}{\theta(z-\zeta_\mu)},$$

und für $z=at+b\upsilon_2$:

$$F(z-iK')=C+R_1\left[\frac{\theta'(z-\zeta_1-2iK')}{\theta(z-\zeta_1-2iK')}-\frac{i\pi}{K}\right]$$
$$+R_2\frac{\theta'(z-\zeta_2)}{\theta(z-\zeta_2)}+\dots+R_\mu\frac{\theta'(z-\zeta_\mu)}{\theta(z-\zeta_\mu)}.$$

Jetzt zeigt sich die ganze Wichtigkeit der charakteristischen Eigen-

der Funktion zweiter Gattung in Bezug auf die doppelte
cität; in der That gelten die Beziehungen:

$$Z(x+2K) = Z(x) + 2J,$$
$$Z(x+2iK') = Z(x) + 2iJ'$$

lgenden gleich:

$$\frac{\Theta'(x+2K)}{\Theta(x+2K)} = \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)},$$
$$\frac{\Theta'(x-2iK')}{\Theta(x-2iK')} = \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)} + \frac{i\pi}{K}.$$

s folgt, dass man auch durch Einführung der Transcendenten
Entwickelungsformeln auf eine zurückführen kann, da die
e $\frac{\Theta'(z-\zeta_1-2iK')}{\Theta(z-\zeta_1-2iK')} - \frac{i\pi}{K}$ sich auf $\frac{\Theta'(z-\zeta_1)}{\Theta(z-\zeta_1)}$ reducirt. — Hieraus
eine analytische Beziehung, die für alle möglichen Werthe des
nentes gilt, und deren schliessliche Form man, indem man von
iK') zu F (z) übergeht, auf folgende Weise erhält. Rufen
ns zunächst die Formel in's Gedächtniss:

$$\Theta(x+iK') = i\,H(x)\,e^{-\frac{i\pi}{4K}(2x+iK')},$$

s sich ergiebt, wenn man die logarithmischen Ableitungen
Glieder nimmt:

$$\frac{\Theta'(x+iK')}{\Theta(x+iK')} = \frac{H'(x)}{H(x)} - \frac{i\pi}{2K}.$$

lgt, wenn man $z+iK'$ für z setzt:

$$= C + R_1\frac{H'(z-\zeta_1)}{H(z-\zeta_1)} + R_2\frac{H'(z-\zeta_2)}{H(z-\zeta_2)} + \dots + R_\mu\frac{H'(z-\zeta_\mu)}{H(z-\zeta_\mu)}$$
$$- \frac{i\pi}{2K}(R_1 + R_2 + \dots + R_\mu),$$

einfach, da die Residuensumme gleich Null ist:

$$= C + R_1\frac{H'(z-\zeta_1)}{H(z-\zeta_1)} + R_2\frac{H'(z-\zeta_2)}{H(z-\zeta_2)} + \dots + R_\mu\frac{H'(z-\zeta_\mu)}{H(z-\zeta_\mu)}.$$

Endlich in dem Falle, wo ζ nicht mehr eine einfache Wurzel
Gleichung $\frac{1}{F(z)} = 0$ ist, sondern eine Wurzel nter Ordnung,
ann die Gleichung stattfindet:

$$\varepsilon^n F(\zeta+\varepsilon) = A + B\varepsilon + \dots + Q\varepsilon^{n-2} + R\varepsilon^{n-1} + \dots$$

wird das einzelne Glied $R\frac{H'(z-\zeta)}{H(z-\zeta)}$ in der Formel durch die nachstehende Summe ersetzt:

$$R\frac{H'(z-\zeta)}{H(z-\zeta)}-Q\frac{d}{dz}\left[\frac{H'(z-\zeta)}{H(z-\zeta)}\right]+\ldots+\frac{(-1)^{n+2}B}{1.2\ldots n-2}\frac{d^{n-2}}{dz^{n-2}}\left[\frac{H'(z-\zeta)}{H(z-\zeta)}\right]$$
$$+\frac{(-1)^{n-1}A}{1.2\ldots n-1}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[\frac{H'(z-\zeta)}{H(z-\zeta)}\right].$$

V. Liouville'scher Satz.

Wir begründen den Beweis desselben auf die vorstehende Formel, indem wir darin setzen:

$$F(z)=\frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)},$$

wo $\Phi(z)$ eine eindeutige doppelt periodische Funktion ist, deren Perioden wie oben $2K$ und $2iK'$ sein sollen. Die Wurzeln ζ sind dann die Auflösungen der Gleichungen:

$$\Phi(z)=0,\quad \frac{1}{\Phi(z)}=0.$$

Wir wollen die ersten mit ζ, die letzteren mit ζ' bezeichnen, indem wir immer voraussetzen, dass sie durch die Formel:

$$p+2Kt+2iK'u$$

dargestellt werden, wo t und u zwischen Null und Eins liegen. Was die Residuen von $\frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)}$ anbetrifft, so weiss man, dass dieselben gleich $+1$ oder gleich -1 sind, je nachdem sie sich auf die Grössen ζ oder ζ' beziehen, und da ihre Summe gleich Null ist, so kommt man auf den bemerkenswerthen Schluss, dass die Grössen ζ und ζ' in gleicher Anzahl vorhanden sind. Bezeichnen wir nun diese Anzahl mit n, so hat man:

$$\frac{\Phi'(z)}{\Phi(z)}=C+\frac{H'(z-\zeta_1)}{H(z-\zeta_1)}+\frac{H'(z-\zeta_2)}{H(z-\zeta_2)}+\ldots+\frac{H'(z-\zeta_n)}{H(z-\zeta_n)}$$
$$-\frac{H'(z-\zeta'_1)}{H(z-\zeta'_1)}-\frac{H'(z-\zeta'_2)}{H(z-\zeta'_2)}-\ldots-\frac{H'(z-\zeta'_n)}{H(z-\zeta'_n)}.$$

Hieraus folgt, wenn man unter A eine beliebige Constante versteht:

$$\Phi(z)=A\,e^{Cz}\,\frac{H(z-\zeta_1)\,H(z-\zeta_2)\ldots H(z-\zeta_n)}{H(z-\zeta'_1)\,H(z-\zeta'_2)\ldots H(z-\zeta'_n)},$$

usdruck, der die Grössen 2 K und 2 i K' als Perioden haben — Benutzt man aber die Beziehungen:

$$H(x+2K) = -H(x),$$

$$H(x+2iK') = H(x)\,e^{-\frac{i\pi}{K}(x+iK')}$$

ezeichnet die Summe der Wurzeln ζ mit $\Sigma\zeta$, die Summe der eln ζ' mit $\Sigma\zeta'$, so findet man:

$$\Phi(z+2K) = \Phi(z)\,e^{2KC},$$

$$\Phi(z+2iK') = \Phi(z)\,e^{2iK'C+\frac{i\pi}{K}\Sigma\zeta-\frac{i\pi}{K}\Sigma\zeta'},$$

ss sein muss:

$$e^{2KC} = 1,$$

$$e^{2iK'C+\frac{i\pi}{K}\Sigma\zeta-\frac{i\pi}{K}\Sigma\zeta'} = 1,$$

iese Bedingungen geben, wenn man unter α und β beliebige Zahlen versteht:

$$C = -\frac{i\pi}{K}\beta,$$

$$\Sigma\zeta - \Sigma\zeta' = 2\alpha K + 2\beta i K'.$$

beachte diese merkwürdige Beziehung zwischen den Wurzeln Gleichungen:

$$\Phi(z) = 0, \quad \frac{1}{\Phi(z)} = 0,$$

on Liouville entdeckt worden ist. Was die ganzen Zahlen α β anbetrifft, die darin vorkommen, so fügen wir nur noch hinzu, sie sich unmittelbar auf die Funktion $\Phi(z)$ selbst mittelst der nden Gleichung beziehen:

$$\ldots\frac{\Phi'(p+2iK't)}{\Phi(p+2iK't)}\,dt - \int_0^1 \frac{\Phi'(p+2Kt)}{\Phi(p+2Kt)}\,dt = \frac{\pi}{2KK'}(\alpha K + \beta i K').$$

us ergeben sich nachstehende Folgerungen. Es ist:

$$H(z+\Sigma\zeta) = H(z+\Sigma\zeta'+2\alpha K+2\beta i K')$$

daher:

$$H(z+\Sigma\zeta) = (-1)^{\alpha+\beta}\,H(z+\Sigma\zeta')\,e^{-\frac{i\pi}{K}(\beta z+\beta^2 iK')},$$

man auch schreiben kann:

$$(-1)^{\alpha+\beta}\, q^{\beta^2} \frac{H(z+\Sigma\zeta)}{H(z+\Sigma\zeta')} = e^{-\frac{i\pi}{K}\beta z}.$$

Vertauscht man nun den Exponentialfaktor $e^{Cz} = e^{-\frac{i\pi}{K}\beta z}$, welcher in der Entwickelung von $\Phi(z)$ vorkommt, mit diesem Quotienten zweier Funktionen H und setzt:

$$(-1)^{\alpha+\beta}\, q^{\beta^2}\, A = a,$$

so ist:

$$\Phi(z) = a\,\frac{H(z-\zeta_1)\,H(z-\zeta_2)\ldots H(z+\Sigma\zeta)}{H(z-\zeta'_1)\,H(z-\zeta'_2)\ldots H(z+\Sigma\zeta')}.$$

Man erkennt aber im Zähler und Nenner von $\Phi(z)$ die Ausdrücke wieder, welche wir schon angewandt haben, indem wir den Abelschen Satz von der Addition der Argumente bewiesen. Ist z. B. die Anzahl der n ungrade, so ist der Ausdruck:

$$\frac{H(z-\zeta_1)\,H(z-\zeta_2)\ldots H(z+\Sigma\zeta)}{\Theta^{n+1}(z)}$$

derselbe, als der, welchen wir Seite 60 betrachtet haben und den man folgendermassen ausdrücken kann:

$$\varphi(z) = F(x^2) + \frac{dx}{dz}\, x\, F_1(x^2),$$

wo $F(x)$ und $F_1(x)$ ganze Polynome vom Grade $\frac{n+1}{2}$ und $\frac{n-3}{2}$ bezeichnen und x gleich sin am z, cos am z oder Δ am z genommen werden kann. Ist n grade, so ist der Ausdruck derselbe, als der, welcher Seite 61 mit $\varphi_1(x)$ bezeichnet wurde, und man hat dann, wenn man unter $F(x)$ und $f(x)$ ganze Polynome von x, bezüglich von den Graden $\frac{n}{2}$ und $\frac{n-2}{2}$ versteht:

$$\frac{H(z-\zeta_1)\,H(z-\zeta_2)\ldots H(z+\Sigma\zeta)}{\Theta^{n+1}(z)}$$

$$= \sin \operatorname{am} z\, F(\sin^2 \operatorname{am} z) + \frac{d \sin \operatorname{am} z}{dz}\, f(\sin^2 \operatorname{am} z).$$

Man sieht also, dass $\Phi(z)$ durch den Quotienten zweier Ausdrücke von der angegebenen Art bestimmt ist; gerade aber in der Reduction einer doppelt periodischen Funktion auf sin am z und seine Ableitung besteht die Aufgabe, mit der wir uns hier zu beschäftigen hatten.

Beweis, den wir so eben gegeben haben, beruht gänzlich
allgemeinen Ausdruck einer doppelt periodischen Funktion,
vorhin gefunden hatten, nämlich:

$$C + R_1 \frac{H'(x-\zeta_1)}{H(x-\zeta_1)} + R_2 \frac{H'(x-\zeta_2)}{H(x-\zeta_2)} + \ldots + R_\mu \frac{H'(x-\zeta_\mu)}{H(x-\zeta_\mu)}.$$

wollen noch einen Weg angeben, unmittelbar dazu zu ge-
ndem man von der Gleichung ausgeht:

$$+at)\,dt + b\int_0^1 f(p+a+bt)\,dt - a\int_0^1 f(p+b+at)\,dt$$

$$- b\int_0^1 f(p+bt)\,dt = 2\,i\pi\Delta.$$

ben $a = 2K$, $b = 2iK'$ und setzen wir:

$$f(z) = F(z)\,\frac{H'(x-z)}{H(x-z)},$$

t sich aus der Definition der Funktion $H(z)$:

$$\frac{H'(z+2K)}{H(z+2K)} = \frac{H'(z)}{H(z)},$$

$$\frac{H'(z-2iK')}{H(z-2iK')} = -\frac{H'(z)}{H(z)} + \frac{i\pi}{K},$$

us folgt:

$$f(z+2K) = f(z),$$

$$f(z+2iK') = fz + \frac{i\pi}{K} F(z),$$

ie vorstehende Gleichung sich reducirt auf:

$$\int_0^1 F(p+2Kt)\,dt = -\Delta;$$

verschiedenen Residuen, welche in Δ enthalten sind, be-
h einerseits auf $z = \zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_\mu$ und andererseits auf
Die ersteren, wenn sie, wie wir annahmen, einfachen
entsprechen, geben als Summe:

$$\frac{H'(x-\zeta_1)}{H(x-\zeta_1)} + R_2 \frac{H'(x-\zeta_2)}{H(x-\zeta_2)} + \ldots + R_\mu \frac{H'(x-\zeta_\mu)}{H(x-\zeta_\mu)},$$

und das auf $z = x$ bezügliche Residuum, welches eine einfache Wurzel von $H(x-z) = 0$ ist, wird offenbar $-F(x)$ sein. Der hieraus sich ergebende Ausdruck für Δ giebt unmittelbar die Gleichung:

$$F(x) = \int_0^1 F(p+2kt)\,dt + R_1 \frac{H'(x-\zeta_1)}{H(x-\zeta_1)} + R_2 \frac{H'(x-\zeta_2)}{H(x-\zeta_2)} + \cdots$$
$$+ R_\mu \frac{H'(x-\zeta_\mu)}{H(x-\zeta_\mu)}.$$

Wir fügen in Bezug auf diese Formel, die wir abgekürzt schreiben:

$$F(x) = C + \Sigma R \frac{H'(x-\zeta)}{H(x-\zeta)},$$

noch eine Bemerkung hinzu. Wenn man das Additionstheorem für die Argumente der Funktion zweiter Gattung*) anwendet, findet man leicht die Beziehung:

$$\frac{H'(x-\zeta)}{H(x-\zeta)} = \frac{H'(x)}{H(x)} - \frac{H'(\zeta)}{H(\zeta)} - \cot \operatorname{am} x \, \Delta \operatorname{am} x + \frac{\sin \operatorname{am} x}{\sin \operatorname{am} \zeta \sin \operatorname{am} (x-\zeta)}.$$

Hieraus folgt, wenn man in den Ausdruck von $F(x)$ einsetzt und die Gleichnng:

$$\Sigma R = 0$$

berücksichtigt, die neue Formel:

$$F(x) = C - \Sigma R \frac{H'(\zeta)}{H(\zeta)} + \sum \frac{R \sin \operatorname{am} x}{\sin \operatorname{am} \zeta \sin \operatorname{am} (x-\zeta)}$$

oder:

$$F(x) = \text{const} + \sum \frac{R \sin \operatorname{am} x}{\sin \operatorname{am} \zeta \sin \operatorname{am} (x-\zeta)}.$$

Dies ist ebenfalls eine Reduktion der doppelt periodischen Funktion auf $\sin \operatorname{am} x$ und seine Ableitung. Aber die schnellere

---

*) In $Z(x)$ kommt eigentlich die Grösse $\frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)}$ vor, statt ihrer kann man indess $\frac{H'(x)}{H(x)}$ setzen, vermittelst der Gleichung $\sin \operatorname{am} x = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{H(x)}{\Theta(x)}$, welche, wenn man die logarithmischen Ableitungen beider Glieder nimmt, giebt:
$$\frac{H'(x)}{H(x)} - \frac{\Theta'(x)}{\Theta(x)} = \operatorname{cotg} \operatorname{am} x \, \Delta \operatorname{am} x.$$

$$\Sigma R = 0,$$

gleich sehen werden. Betrachten wir nämlich die Funktion:

$$f(z) = \frac{F(z)}{\sin am (z) \sin am (x-z)},$$

rioden 2 K und 2 i K' sind. Ihre Residuensumme umfasst diejenigen, welche sich auf die Wurzeln ζ der Gleichung:

$$\frac{1}{F(x)} = 0$$

, diese sind:

$$\sum \frac{R}{\sin am \zeta \sin am (x-\zeta)},$$

ererseits diejenigen Residuen, welche sich aus den beiden gen:

$$\sin am z = 0, \quad \sin am (x-z) = 0$$

Innerhalb der Perioden 2 K und 2 i K' hat man indess Wurzeln $z = 0$, $z = x$, welchen die Residuen $\frac{F(0)}{\sin am x}$, $\frac{\ldots x)}{\ldots n x}$ entsprechen. Man hat folglich:

$$\sum \frac{R}{\sin am \zeta \sin am (x-\zeta)} + \frac{F(0)}{\sin am x} - \frac{F(x)}{\sin am x} = 0,$$

er:

$$F(x) = F(0) + \sum \frac{R \sin am x}{\sin am \zeta \sin am (x-\zeta)}.$$

ganz ähnliche Weise findet man für eine Funktion $\mathfrak{F}(x)$, den Bedingungen genügt:

$$\mathfrak{F}(x + 2K) = -\mathfrak{F}(x),$$
$$\mathfrak{F}(x + 2iK') = \mathfrak{F}(x),$$

achen Ausdruck:

$$\mathfrak{F}(x) = \sum \frac{R}{\sin \operatorname{am}(x - \zeta)},$$

worin nur die Wurzeln ζ vorkommen, die innerhalb $2K$ und $2iK'$ enthalten und durch die Formel:

$$\zeta = p + 2Kt + 2iK'u,$$

wo t und u kleiner als Eins, gegeben sind.

Hiermit brechen wir ab, indem wir glauben, ziemlich vollständig die elementaren Theile der Theorie der elliptischen Funktionen erschöpft zu haben, welche der Lehre von der Transformation vorausgehen.

ANHANG.

ueber Funktionen von einer complexen Variablen und über die Mehrdeutigkeit der Integrale.

I. Geometrische Darstellung des Imaginären.

erschiedenen Abschnitten dieses Buches, z. B. in D.II. und
t auf die Cauchy'sche Theorie des Imaginären und auf
Zusammenhang stehende Gegenstände, so in H.IV. auf
uenrechnung, Bezug genommen. Der Uebersetzer hält es
r angemessen, diese wichtige Theorie, die jetzt auch bei
en Betrachtungen unentbehrlich zu werden beginnt, mit
Vorten zu geben, um so mehr, als die Elementarbücher
n hierauf Rücksicht zu nehmen pflegen. —
xe man sich zunächst eine grade Linie, nach beiden Seiten
dliche gehend, auf derselben einen beliebig angenommenen
und eine Strecke, die man als Einheit betrachtet; sei
ejenige der beiden Richtungen festgestellt, die als positiv
t werden soll, so kann man, von O beginnend, immer ein
A, aber nur eins abmessen, welches einer beliebig ge-
reellen Grösse z entspricht, und man kann sagen, dass
ositiven oder negativen Werthe von z ein Punkt A auf
Linie entspricht. — Ist aber $z = x + yi$ eine complexe
hört diese Veranschaulichung auf; geht man indess, statt
r Linie, nach Gauss's und Cauchy's Vorgange von einer
us, so kann man auch hier geometrische Betrachtungen
. Man nimmt nämlich auf dieser unendlich gedachten
vei auf einander rechtwinkelige Axen beliebig an, bestimmt,
eine beliebige Strecke als Einheit, so wie die positive
der Ordinaten und Abscissen; es können dann die beiden
Grössen x und y immer als Abscisse und Ordinate eines
A in der Ebene betrachtet werden, und es wird somit jedem
von $z = x + yi$ ein solcher Punkt, und zwar nur einer

und imaginären Theil bezüglich immer Ordinate und Abscisse verstanden sind. Alle Punkte auf der Abscissenaxe haben dann reelle, alle auf der Ordinatenaxe rein imaginäre Werthe. Den Ausdruck $z = x + yi$ kann man noch auf eine andere Art geometrisch bestimmen als durch Ordinate und Abscisse. Setzt man nämlich:

$$x = r\cos\varphi, \quad z = r\sin\varphi,$$

d. h. führt man Polarcoordinaten ein, so ist:

$$z = re^{\varphi i}.$$

Der Modul von z stellt also die Entfernung des entsprechenden Punktes A vom Anfangspunkte der Coordinaten, der Winkel φ die Lage dieser Entfernung zur Abscissenaxe dar. Es ist ferner klar, dass man von einem Werth von z: a, zu einem andern b auf unendlich viel Weisen in continuirlicher Art übergehen kann, dass aber nur ein Weg eine grade Linie bildet. Sind a und b reell, so ist diese grade Linie die Abscissenaxe, und dieser Weg ist der einzige, auf welchem während des ganzen Ueberganges von a zu b die Grösse z reell bleibt.

II. Ueber Funktionen von einer complexen Variablen.

Sei:

$$z = x + yi$$

und

$$u = f(z) = p + qi.$$

Damit die Funktion von z u vollständig definirt sei, muss zu jedem complexen Werthe von z, d. h. also zu jedem Punkte der unendlichen Ebene, ein bestimmter, nach irgend einem Gesetze sich ergebender complexer Werth von u gehören. Sollte dies Gesetz also derart sein, dass für jedes z sich zwei oder mehrere Werthe von u daraus ergeben, so muss in jedem Falle derjenige der Werthe, der zu nehmen ist, näher bestimmt werden. Wir unterscheiden demnach eindeutige und mehrdeutige Funktionen; $\sqrt[n]{z}$ ist z. B. eine mehrdeutige Funktion, da zu jedem z n Werthe der Wurzelgrösse gehören, während $az + b$ eine eindeutige Funktion ist. $u = f(z)$ wird sich im Allgemeinen mit z zugleich continuirlich ändern, nur in einzelnen Punkten kann hiervon eine Ausnahme stattfinden, insofern u

vir als Discontinuitäts-Punkte der Funktion u bezeichnen. und Weise, wo sich u mit z ändert, wird durch die Ab-

$\frac{}{z}$ angegeben. In Bezug auf dieselbe ist hier jedoch eine Bemerkung zu machen. Bekanntlich ist:

$$\frac{du}{dz} = \lim \frac{f(z+\alpha) - f(z)}{\alpha}$$

nwindendes α. Denken wir uns zunächst diese verschwin- össe α reell, so ist, wie die Anfangsgründe der Differenzial- ergeben, die bezeichnete Grenze eine im Allgemeinen von ngige neue Funktion von z, und nur für einzelne Punkte nes kann diese Grösse von α abhängig und somit discon- werden. Gleiches findet statt, wenn man statt des reellen in imaginäre verschwindende Grösse βi setzt. Indess folgt dem Begriffe der Funktion, dass die Ausdrücke:

$$\frac{f(z+\alpha) - f(z)}{\alpha}, \quad \frac{f(z+\beta i) - f(z)}{\beta i}$$

derselben Grenze nähern. Setzen wir demgemäss:

$$\left(\frac{du}{dz}\right) = \lim \frac{f(z+\beta i) - f(z)}{\beta i}$$

$$\frac{\delta u}{\delta z} = \lim \frac{f(z+\alpha+\beta i) - f(z)}{\alpha+\beta i},$$

Zuwachs also complex ist, es ist dann offenbar auch:

$$\frac{\delta u}{\delta z} = \lim \frac{f(z+\alpha+\beta i) - f(z+\alpha) + f(z+\alpha) - f(z)}{\alpha+\beta i}$$

$$= \frac{\alpha \frac{d\, f(z)}{dz} + \beta i \left(\frac{d\, f(z+\alpha)}{dz}\right)}{\alpha+\beta i},$$

en des verschwindend kleinen α:

$$\frac{\delta u}{\delta z} = \frac{\frac{du}{dz} + \frac{\beta i}{\alpha}\left(\frac{du}{dz}\right)}{1 + \frac{\beta i}{\alpha}},$$

---

e Frage, ob und wann Discontinuitäten von u längs ganzer ttfinden, soll hier unerwogen bleiben.

mithin wäre die Ableitung von dem Quotienten $\frac{\beta}{\alpha}$ des reellen und imaginären Theiles des Zuwachses, also von einer im Allgemeinen endlichen Grösse abhängig. Diese Abhängigkeit wird nur dann vermieden, wenn die Beschaffenheit der Funktion u es bedingt, dass

$$\frac{du}{dz} = \left(\frac{du}{dz}\right)$$

ist; es wird dann nämlich sich unmittelbar ergeben:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{du}{dz},$$

dann ist also der Differenzialquotient ganz unabhängig von der Beschaffenheit des Zuwachses $\alpha + \beta i$, derselbe möge reell, rein imaginär oder complex sein. Funktionen, welche diese Eigenschaft für jeden Werth von z haben, nennt Cauchy monogen.

In den Elementen der Analysis wird dargethan, dass alle algebraischen Funktionen, so wie die Exponentialgrössen, Logarithmen und trigonometrischen Funktionen in der That monogen sind, und es zeigt sich leicht, dass alle Combinationen solcher Grössen, so wie die mittelst der Integralrechnung aus ihnen entstehenden Funktionen diese Eigenschaft beibehalten. Da wir es hier nun ausschliesslich mit solchen Funktionen zu thun haben, so nehmen wir für die in dem Folgenden zu betrachtenden Grössen ohne Weiteres an, dass dieselben monogen sind, also die Bedingungsgleichung $\left(\frac{du}{dz}\right) = \frac{du}{dz}$ erfüllen.

III. Eindeutige und mehrdeutige Funktionen.

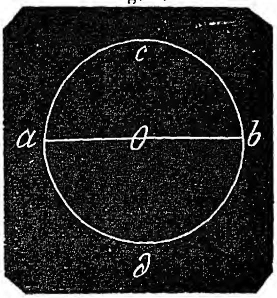
Ist die Funktion $u = f(z)$ eindeutig, und lässt man z von irgend einem Punkte a der Ebene zu einem andern b fortschreiten, so wird, welchen Weg man auch verfolge, die Funktion von dem Werthe f (a) zu dem Werthe f (b) übergehen, und ist dieser letztere immer derselbe, also von dem Wege ganz unabhängig, da ja wegen der Eindeutigkeit von u in Punkt b die Funktion nur den einen Werth f (b) annehmen kann.

Sei nun aber die Funktion u mehrdeutig; nehmen wir z. B. an, sie könnte für einen beliebigen Punkt z die Werthe $f_1(z)$ und $f_2(z)$ annehmen; es ist dann möglich, dass, wenn man auf zwei verschiedenen Wegen von a zu b übergeht, indem man mit demselben Werth von u für a, also z. B. mit $f_1(a)$ beginnt, man schliesslich

einen Wege den Werth $f_1(b)$, auf dem andern aber $f_2(b)$ Jm dies an einem Beispiel klar zu machen, wollen wir die u $= \sqrt{z}$ betrachten, welche für jeden Punkt zwei einander gleiche, aber entgegengesetzte Werthe hat.

nnen wir mit einem Punkte der Abscissenaxe, der den Werth a hat, mit dem positiven Werthe von $\sqrt{a}$ und gehen Wegen zu Punkt $b = -a$ über. Diese beiden Wege vom Anfangspunkte der Co- mit Halbmesser a gezogenen e acb und adb sein. Führen coordinaten ein, so ist $r = a$, $\sqrt{a e^{\varphi i}}$, der Winkel φ des Ra- der Abscissenaxe ist für Halb- positiv, für adb negativ zu für b wird also im ersten $= + \pi$, im letztern $\varphi = -\pi$, erhält auf dem ersten Wege $-$ a:

Fig. I.



$$u = \sqrt{a e^{\pi i}} = i \sqrt{a},$$

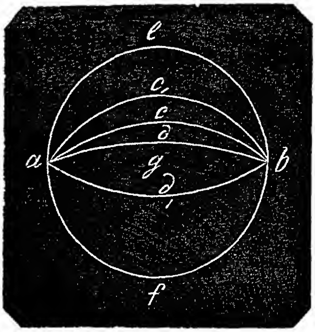
letztern:

$$u = \sqrt{a e^{-\pi i}} = -i \sqrt{a},$$

nan in der That auf beiden Wegen die beiden einander gesetzten Werthe von u erhalten hat. Wir gehen jetzt auf ände ein, unter welchen solch ein Wechsel der Werthe kann. Es sind hierbei diejenigen Punkte derselben in's fassen, für welche zwei oder mehrere Werthe von u, also $f_2(z)$ einander gleich werden; dergleichen Punkte nennen sche Punkte."

$u = \sqrt{z}$ z. B. ist der Anfangspunkt der Coordinaten ein Punkt, da für denselben $z = 0$, $+\sqrt{0} = -\sqrt{0}$ ist; für $+z$ ist $z = -\beta$ ein solcher. Untersuchen wir jetzt die $u = f(z)$, welche mehrdeutig ist, also z. B. die Werthe $f_2(z)$ annehmen kann, für zwei Wege acb und adb, die ne Endpunkte a und b haben (Fig. II.); nehmen wir zu- , diese Wege wichen nur unendlich wenig von einander dem ganzen Umfange acbd und innerhalb desselben sei inuirlich und es fände sich daselbst kein kritischer Punkt, also für jeden Punkt auf diesem Umfange und innerhalb die beiden Werthe $f_1(z)$ und $f_2(z)$ um eine endliche n einander verschieden sind. Fängt man in a mit $u = f_1(a)$

Fig. II.



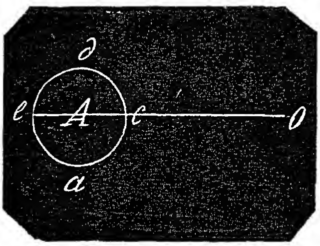
an und verfolgt den Weg acb, so wird sich u continuirlich ändern und in jedem Punkte des Weges, z. B. c oder b, mit einem der beiden Werthe von f(z) anlangen, den wir als f_1 (c), f_1 (b) bezeichnen wollen. Verfolgt man nun mit demselben Anfangswerthe Weg adb, so wird, da die Funktion hier continuirlich ist, in keinem Punkte dieselbe einen Werth annehmen können, der von dem eines benachbarten Punktes des Weges acb um eine endliche Grösse verschieden ist. Ist also d unendlich nahe dem Punkte c, so wird u hier den Werth f_1 (d), nicht f_2 (d) annehmen, da der letztere Werth um eine endliche Grösse von f_1 (d), also auch von f_1 (c) abweicht; dasselbe gilt von jedem Punkte der Linie adb, es wird also auf diesem Wege die Funktion denselben Werth erhalten, als auf dem ersten. Man sieht nun, dass man den Raum von acb bis aeb in unendlich kleine Räume theilen kann, deren Grenzlinien ac_1b u. s. w. alle durch a und b gehen. Auf allen diesen Wegen, schliesslich also auf Weg aeb wird f(b) denselben Werth erhalten, wenn man von a mit einem bestimmten Werthe ausgeht, falls sich in und auf dem Umfange adbe kein kritischer oder Discontinuitätspunkt befindet; Aehnliches gilt für die Strecke afb, welche auf eben die Weise durch continuirliche Uebergänge ad_1b u. s. w. aus adb entsteht. Damit also auf zwei beliebigen Wegen aeb und afb in b die Funktion denselben Werth erhält, vorausgesetzt, dass man in a von demselben Werthe ausgegangen ist, reicht es hin, dass innerhalb und auf aebf kein kritischer oder Discontinuitätspunkt liege, wie auch dieser Umfang beschaffen sei. Was die Discontinuitätspunkte anbetrifft, so kommen hier diejenigen nicht in Betracht, wo $u = f(z)$ unendlich ist und nicht für einen unendlich kleinen Zuwachs von z in's Endliche überspringt, wo also die Discontinuität darin besteht, dass $u = f(z)$ positiv, $u = f(z + \nu)$ negativ unendlich ist, wie z. B. tg z für $z = \frac{\pi}{2}$. Denn auf solchen betrachtet man die Funktion $v = \frac{1}{f(z)}$, welche daselbst Null wird, also continuirlich bleibt. Es kann also auch selbst dann auf den Wegen aeb und afb die Funktion $f_1(z)$ nicht in $f_2(z)$ übergehen, wenn in oder auf dem Umfange f(z) unendlich werden sollte.

iscontinuitätspunkte wollen wir als von erster Klasse be-
Finden dagegen Discontinuitäten statt, wo $f(z)$ von einem
Werthe zu einem andern, oder von einem unendlichen zu
llichen Werthe überspringt, so könnte ein solcher Wechsel
n. Wir bezeichnen solche Discontinuitätspunkte als von
Klasse. Ein Beispiel eines Discontinuitätspunktes zweiter
ietet z. B. die eindeutige Funktion $a + (b - a)\, e^{-e^{\frac{1}{x-\alpha}}}$
che für $x = \alpha + \nu$ den Werth a, für $x = \alpha - \nu$ den
annimmt, wo ν eine positive unendlich kleine Grösse ist.
n zwischen ad_1b und adb sich ein oder mehrere kritische
efinden, also z. B. in g $f_1(g) = f_2(g)$ werden, so sieht
dass in den benachbarten Punkten d und d_1 die Funktionen
$f_2(d_1)$ nur unendlich wenig von einander abweichen, also
gang eintreten kann; es ist also möglich, dass auf Weg
Funktion in b mit Werth $f_1(b)$ anlangt, während sie auf
mit $f_2(b)$ angekommen ist. Ist dies der Fall und be-
h dann innerhalb und auf aefb keine kritischen Punkte
sieht man nach dem Vorigen, dass auch auf den Wegen
afb die Funktion in b mit verschiedenen Werthen an-
leiches gilt von den Discontinuitätspunkten zweiter Klasse.
kritischen Punkte, welche etwa auf dem Umfange liegen,
nicht weiter in Betracht, da man in diesem Falle einen
nahen, von solchen Punkten freien Umfang betrachten
wir haben daher folgenden Satz:
t man von a mit dem Anfangswerth $u = f_1(a)$ auf zwei
ch b, so können nur dann für b sich verschiedene Werthe
ergeben, wenn innerhalb des von beiden Wegen begrenzten
ich kritische oder Discontinuitätspunkte zweiter Klasse
elbstverständlich aber ist durch das Vorhandensein solcher
n solcher Wechsel nur möglich, nicht geboten."
sehen also, dass in Räumen, wo dergleichen Punkte sich
nden, die Funktion $u = f(z)$ in der That eindeutig ist,
ehrdeutigkeit derselben nur von gewissen einzelnen Punkten
es wird also im Folgenden von Räumen, in welchen ge-
nktionen eindeutig sind, die Rede sein können. —
n wir jetzt voraus, dass die Wege aeb und afb in der
zwei verschiedene Werthe von $f(b)$ ergeben, und be-
den ganzen Umfang in Richtung beafb, von $u = f_1(b)$
; man wird dann auf dem Wege bea in a mit $u = f_1(a)$
da der Weg aeb von $f_1(a)$ zu $f_1(b)$ führte, auf Weg
gt man dagegen, wie oben gesehen, von $f_1(a)$ zu $f_2(b)$;

indem man also den Umfang b e a f b, in dem sich kritische Punkte befinden, beschreibt, gelangt die Funktion mit einem andern Werthe als dem ursprünglichen zu ihrem Anfangspunkte zurück, was unmöglich ist, wenn dergleichen Punkte (oder Discontinuitätspunkte punkte zweiter Klasse) in dem umschriebenen Raume nicht vorhanden sind.

Aus diesem Umkreisen von Räumen, welche kritische Punkte enthalten, kann man die Mehrdeutigkeit der Funktionen entstanden denken, Sei z. B. $u = \sqrt{1+z}$. In dieser Funktion ergiebt sich für $z = -1$ ein kritischer Punkt, sei A derselbe, also $0A = -1$;

Fig. III.



beschreiben wir um A einen Kreis mit Radius $Ac = m$, so ist in jedem Punkte der Peripherie $x = -1 + m \cos\varphi$, $y = m \sin\varphi$, $z = -1 + m e^{\varphi i}$, wo φ von 0 bis 2π fortschreitet, während der ganze Kreis c d e a c zurückgelegt wird. Also dem Punkte c entsprechen die Werthe $\varphi = 0$ und $\varphi = 2\pi$, dieselben in $u = \sqrt{1+z}$ eingesetzt, geben bezüglich $u = \sqrt{m}$ und $u = \sqrt{m e^{2\pi i}} = e^{\pi i}\sqrt{m} = -\sqrt{m}$, fängt man also in c, während man den Kreis zurücklegt, mit dem positiven Wurzelwerth an, so kommt man, nachdem der Kreis beschrieben ist, mit dem negativen Wurzelwerth wieder nach c zurück. Bei einem nochmaligen Umkreisen wird der positive Werth wieder hergestellt. Es ist klar, dass z. B. die Funktion $\sqrt[n]{(1+z)}$ erst nach nmaligem Umkreisen des kritischen Punktes auf ihren Anfangswerth zurückkommt.

Betrachten wir ferner die Funktion $u = \lg(1+z)$. Da dieselbe für $z = -1$ unendlich wird, so betrachten wir $v = \frac{1}{\lg(1+z)}$, welche für $z = -1$ Null wird, und es ist klar, dass der unendlich vieldeutige Ausdruck $\frac{1}{\lg(1+z) + 2s\pi i}$ für diesen Punkt lauter gleiche Werthe, nämlich Null annimmt; es ist also $z = -1$ ein kritischer Punkt. Beschreiben wir wie oben den Kreis mit Mittelpunkt A und Radius m, so ist $u = \lg(1+z) = \lg(m e^{\varphi i})$, also für c zu Anfang und nach Zurücklegung des Kreises bezüglich $u = \lg m$ und $u = \lg(m) + 2\pi i$, nach jedesmaligem Umkreisen des Punktes A wird dieser Ausdruck um $2\pi i$ vermehrt; nimmt man die Richtung des Umkreisens entgegengesetzt, so erhält $2\pi i$ das Minuszeichen.

ehen alle Werthe von $\lg(1+z)$. — Dies sind die Elemente
orie der Mehrdeutigkeit monogener Funktionen. Weiteres
namentlich über die Art, wie in den verschiedenen Fällen
chiedenen Werthe einer mehrdeutigen Grösse einander er-
esonders in Bezug auf die Wurzeln algebraischer Gleichungen,
die auch im Buche citirte Abhandlung von Puiseux.

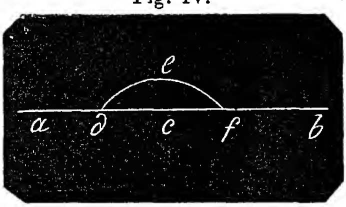
IV. Mehrdeutigkeit der Integrale.

Definition eines bestimmten Integrals ist durch die Formel:

$$\int_a^b f(z)\,dz = \lim\left[\frac{1}{n}\sum f(z_p)\right]$$

, für den Fall, wo n, welche Zahl die Anzahl der Elemente
eutet, unendlich wird. Diese Elemente z_p sind den Be-
en unterworfen, dass jedes aus dem Vorhergehenden auf
liche Weise entsteht, dass a das erste und b das letzte ist;
ner für auf einander folgende Werthe von z_p sich auch $f(z_p)$
tinuirlich ändert; diese letztere wichtige Bedingung findet
statt, weil bei discontinuirlicher Aenderung die bekannten
des Differenziirens und Integrirens nicht mehr richtig sind.
hieraus, dass das Integral $\int_a^b f(z)\,dz$ über jede Linie sich
en kann, deren Endpunkte a und b sind; es giebt daher
h viel solcher Integrale und alle diese würden verschiedene
haben, wenn nicht die Monogenität der Funktion f (z) hier
nkungen eintreten liesse, von denen sogleich die Rede
d.
d a und b reell, so kann man das Integral auf der Ab-
xe nehmen, falls zwischen a und b kein Discontinuitäts-
tattfindet, und dies ist die in den Elementen gewöhnliche
Bestimmung der Integrale.
aber ein solcher Disconti-
unkt z. B. in c statt, so
r mittelst eines beliebig
ı denkenden Bogens d e f
en werden, es ist dann
egral auf den Weg a d e f b
hnen, und für diesen Bogen

Fig. IV.



s Element imaginär. Dies erklärt es, dass Integrale zwischen
Grenzen selbst dann noch continuirliche Werthe ergeben,

$$\int_{-b}^{+b} \frac{dx}{x} = -\lg(-1),$$

obgleich für $x = 0$, also zwischen $-b$ und $+b$ Discontinuität stattfindet; man muss sich nämlich den Anfangspunkt der Coordinaten durch etwa einen Halbkreis, der denselben zum Mittelpunkt hat, umgangen denken, wo dann keine Discontinuität stattfindet. Diese Bemerkung ist als eine nothwendige Ergänzung der Elemente der Integralrechnung zu betrachten und zum vollständigen Verständniss derselben erforderlich. — Ist $b = a$, so ist das Integral auf einer geschlossenen, im Uebrigen aber beliebigen Linie genommen, als z. B. auf einem Kreise oder auf dem Umfange eines Rechtecks u. s. w. Uebrigens folgt aus den Elementen, dass ein Integral auf einem beliebigen Wege von a nach b genommen, den entgegengesetzten Werth hat, als das auf demselben Wege von b nach a genommene Integral, falls man nur im letzten Falle mit dem Werthe von $f(b)$ beginnt, mit dem man im ersten aufhörte.

Was nun den Wechsel der Werthe eines bestimmten Integrals anbetrifft, so gilt folgender Hauptsatz für alle monogenen Funktionen:

Erstreckt man ein bestimmtes Integral in den Grenzen a und b auf zwei durch a und b gehende Linien, auf denen und zwischen denen die Funktion eindeutig ist und sich kein Discontinuitätspunkt befindet, so sind beide bestimmte Integrale gleich.

Wir beweisen diesen Satz zunächst für zwei einander unendlich nahe Linien acb und adb. Sei $\int_a^b f(z)\,dz$ das auf die erste Linie bezogene Integral, so kann, da von dem auf adb bezogenen jedes Element z und $f(z)$ sich nur unendlich wenig von den entsprechenden Elementen eines Punktes der Linie acb unterscheidet, das letztere Integral gleich

$$\int_a^b f(z)\,dz + \delta \int_a^b f(z)\,dz$$

gesetzt werden, wo das Variationszeichen δ den Uebergang der Linie acb zur Linie adb darstellt. Nach den Gesetzen der Variationsrechnung ist aber

$$\delta \int_a^b f(z)\,dz = \int_a^b [f(z)\,d\delta z + \delta f z\,dz].$$

lan hat aber:

$$\int_a^b f(z)\,d\delta z = f(b)\,\delta b - f(a)\,\delta a - \int_a^b d\,f(z)\,\delta z.$$

a den Grenzen a und b beide Wege zusammentreffen, ist aber

$$\delta b = \delta a = 0$$

aher:

$$\delta \int_a^b f(z)\,dz = \int_a^b [\delta\, f(z)\,dz - d\,f(z)\,\delta z].$$

(z) eine monogene Funktion, folglich

$$\frac{\delta f(z)}{\delta z} = \frac{d f(z)}{dz}$$

elches auch die Beschaffenheit des Zuwachses sei, so ist dieser ruck gleich Null und folglich der Werth von $\int_a^b f(z)\,dz$ für Werthe gleich. Was hier für zwei unendlich nahe Integra-vege bewiesen wurde, gilt für beliebige, da von jedem zu nächsten und so bis zu einem beliebigen übergegangen werden , und die Variation verschwindet, falls sich innerhalb des n durchmessenen Raumes kein Discontinuitätspunkt befindet.

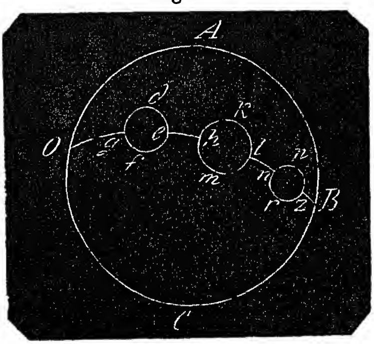
Dieser Satz ist identisch mit dem folgenden.

Satz I. „Befindet sich innerhalb eines geschlossenen Umfangs 3CO (Fig. V.) und auf demselben kein kritischer oder Discon-ätspunkt, so ist das über diesen Umfang erstreckte Integral n Null."

In der That sind die Integrale für die Wege OAB und OCB n; setzt man für das letztere das auf Weg BCO bezogene ral mit umgekehrtem Vorzeichen, so ist die Summe der auf 3 und BCO, d. h. auf OABCO bezogenen Integrale in der Null. — Aus unserem ergiebt sich aber noch folgende allgemeinere.

Satz II. „Betrachten wir von mehreren geschlosse- Linien begrenzten Raum, den zwischen OABCO, fg, hklmh, npzrn liegen- und sei innerhalb dieses fach begrenzten Raumes, edenfalls eine (die äussere) enzung die übrigen ein-

Fig. V.



ist das auf die äussere Begrenzung bezogene Integral gleich der Summe der auf die innern Begrenzungen bezogenen, wenn alle Begrenzungen in derselben Richtung zurückgelegt werden."

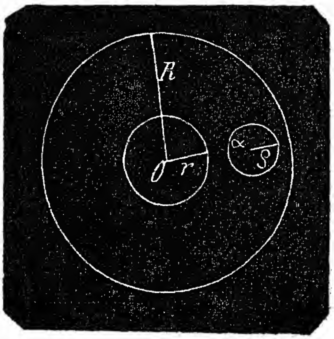
Es ist nämlich das über OAB erstreckte Integral gleich dem über OgdehklnpzB erstreckten, da beide Begrenzungen keinen Discontinuitätspunkt einschliessen; ebenso ist das über BCO erstreckte Integral gleich dem über BzrnlmhefgO erstreckten, also das ganze über OABCO erstreckte dem über OgdehklnpzBzrnlmhefgO erstreckten gleich; vom letztern aber heben sich, da die Funktion in dem betrachteten Raume eindeutig ist, die entgegengesetzten Strecken: Og, gO — eh, he — ln, nl — zB, Bz weg, und es bleiben die Integrale über gdef, hklm, npzr übrig.

Ist eine Funktion innerhalb eines irgend wie begrenzten Raumes eindeutig, aber nicht continuirlich, so findet der letztere Satz noch immer statt, wenn man die Discontinuitätspunkte als Mittelpunkte unendlich kleiner Kreise betrachtet und die Peripherien der letzteren in die inneren Begrenzungen mit aufnimmt, denn in den übrigen Räumen ist dann die Funktion continuirlich. — Ist der Raum, in welchem die Funktion eindeutig und continuirlich ist, der von zwei geschlossenen Umfängen begrenzte Ring, so ist das Integral auf die eine Grenzcurve ausgedehnt, dem auf die andere ausgedehnten gleich.

V. Entwickelung der Funktionen in Reihen.

Der Satz II. giebt unter Anderem das zur Entwickelung der Funktionen in Reihen nach positiven und negativen Potenzen der Variablen, so wie nach Vielfachen der Sinus und Cosinus Nöthige.

Fig. VI.



Denken wir uns zunächst zwei um den Anfangspunkt der Coordinaten bezüglich mit den Radien R und r gezogene Kreise, wo $R > r$ ist, und nehmen wir an, dass auf deren Peripherien innerhalb des durch beide gebildeten Ringes die Funktion f (z) eindeutig und continuirlich sei; ist dann $z = \alpha$ ein im Ringe befindlicher Punkt, so wird auch die Funktion $\frac{f(z)}{z-\alpha}$ innerhalb dieses Ringes,

mit Ausnahme des Punktes $z = \alpha$, für welchen sie unendlich ist, eindeutig und continuirlich sein. Umgiebt man also α mit unendlich kleinen Kreise, dessen Radius ρ ist, so wird das n Kreis mit Radius R bezogene Integral von $\frac{f(z)}{z-\alpha}$ gleich dem e beiden Kreise mit Radien r und ρ bezogenen Integrale des- Ausdrucks sein. Es ist nun für den ersten Kreis $z = Re^{\varphi i}$, n zweiten $z = re^{\varphi i}$, für den dritten $z = \alpha + \rho e^{\varphi i}$ zu setzen,

$$\text{A)} \quad i \int_0^{2\pi} \frac{f(Re^{\varphi i}) Re^{\varphi i} d\varphi}{Re^{\varphi i} - \alpha} = i \int_0^{2\pi} \frac{f(re^{\varphi i}) re^{\varphi i} d\varphi}{re^{\varphi i} - \alpha} + i \int_0^{2\pi} f(\alpha + \rho e^{\varphi i}) d\varphi.$$

äftigen wir uns zunächst mit dem letzten Integral. Es ist:

$$f(\alpha + \rho e^{\varphi i}) = f(\alpha) + F(\varphi),$$

$$F(\varphi) = f(a + \rho e^{\varphi i}) - f(\alpha)$$

soll. Mithin unser Integral:

$$\int_0^{2\pi} f(\alpha + \rho e^{\varphi i}) d\varphi = 2\pi f(\alpha) + \int_0^{2\pi} F(\varphi)\, d\varphi.$$

der grösste Werth, den $F(\varphi)$ annehmen kann, so ist:

$$\int_0^{2\pi} F(\varphi)\, d\varphi < 2\pi L,$$

da wegen der vorausgesetzten Continuität von $f(z)$ in dem be- neten Flächenraume $F(\varphi)$, also auch L unendlich klein ist, so nan:

$$\int_0^{2\pi} f(\alpha + \rho e^{\varphi i})\, d\varphi = 2\pi f(\alpha).$$

em ersten Integrale ist der Modul von α immer kleiner als R daher:

$$\frac{f(Re^{\varphi i}) Re^{\varphi i}}{Re^{\varphi i} - \alpha} = f(Re^{\varphi i}) \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\alpha^n}{R^n e^{n\varphi i}},$$

ie unter dem Summenzeichen enthaltene Reihe jedenfalls con- rt. Im zweiten Integral ist der Modul von α grösser als r deshalb:

$$\frac{f(re^{\varphi i})\,re^{\varphi i}}{re^{\varphi i}-\alpha} = -f(re^{\varphi i})\sum_{s=1}\frac{r^s e^{s\varphi i}}{\alpha^s},$$

wo die unendliche Reihe ebenfalls convergirt. Bemerken wir jedoch, dass nur dann, wenn α innerhalb des betrachteten Ringes liegt, bei beiden Reihen Convergenz stattfinden kann; für jeden Punkt α innerhalb des kleineren Kreises wird nämlich die erste, für jeden ausserhalb des grösseren die letzte Reihe divergiren. Die so gefundenen Werthe in unsere Formel eingesetzt, geben:

$$\sum_{n=0}^{n=\infty}\alpha^{-n}\int_0^{2\pi}\frac{f(Re^{\varphi i})}{R^n e^{n\varphi i}}d\varphi = -\sum_{n=1}^{n=\infty}\alpha^{-n}\int_0^{2\pi} r^n e^{n\varphi i} f(re^{\varphi i})\,d\varphi + 2\pi f(\alpha)$$

oder:

$$1)\qquad f(\alpha) = \frac{1}{2\pi}\left[\sum_{n=0}^{n=\infty}\alpha^n\int_0^{2\pi}\frac{f(Re^{\varphi i})\,d\varphi}{R^n e^{n\varphi i}} + \sum_{n=1}^{n=\infty}\alpha^{-n}\int_0^{2\pi} r^n e^{n\varphi i} f(re^{\varphi i})\,d\varphi\right],$$

d. h. $f(\alpha)$ ist immer in convergenter Reihe nach positiven und negativen Potenzen von α entwickelbar, so lange der Modul von α zwischen dem grössten und kleinsten Werthe derjenigen Moduln liegt, für welche die Funktion $f(z)$ immer eindeutig und continuirlich ist. Bleibt $f(z)$ von Modul Null an bis zu einem gewissen R eindeutig und continuirlich, so ist $r = 0$ zu setzen;

$$2)\qquad f(\alpha) = \frac{1}{2\pi}\sum\alpha^n\int_0^{2\pi}\frac{f(Re^{\varphi i})\,d\varphi}{R^n e^{n\varphi i}}.$$

d. h. jede Funktion $f(\alpha)$, die für $\alpha = 0$ eindeutig und continuirlich ist, kann immer nach ganzen positiven Potenzen von α entwickelt werden, so lange der Modul von α kleiner als derjenige ist, für welchen $f(z)$ aufhört eindeutig und continuirlich zu sein. Findet aber die angegebene Bedingung nicht statt, so muss nothwendig die Reihe divergiren.

Aus den Elementen der Theorie der Reihen folgt, dass nur eine Entwickelung von $f(\alpha)$ nach ganzen positiven Potenzen von α möglich ist, es muss daher die entsprechende hier gegebene Entwickelung mit der Maklaurin'schen übereinstimmen, d. h. es ist:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0 \frac{\ldots}{R^n e^{n\varphi i}} = \frac{\ldots}{1.2\ldots n} f^{(n)}_{(0)},$$

jedoch innerhalb des Kreises liegen muss, für welchen f (z) ...tig und continuirlich ist. Uebrigens ist klar, dass die beiden ...ale, welche in der Entwickelung 1) vorkommen:

$$\int_0^{2\pi} \frac{f(R e^{\varphi i})\, d\varphi}{R^n e^{n\varphi i}}, \quad \int_0^{2\pi} r^n e^{n\varphi i} f(r e^{\varphi i})\, d\varphi,$$

...e auch, wenn man wieder $r e^{\varphi i}$ und $R e^{\varphi i}$ gleich z setzt, ge...ben werden können:

$$\frac{1}{i}\int \frac{f(z)}{z^{n+1}}\, dz, \quad \frac{1}{i}\int z^{n-1} f(z)\, dz,$$

...de geschlossene Curve gleichen Werth geben, die ganz inner... des bezeichneten Ringes, oder im Falle 2) innerhalb des Kreises ...lten ist, nur mit Ausnahme des Falles, wo $z = 0$ ist; denn ...sen Räumen sind $\frac{f(z)}{z^{n+1}}$, $z^{n-1} f(z)$ eindeutig und continuirlich. ...önnen also in 1) r und R durch jeden zwischen beiden liegen...eellen Werth, und in 2) R durch jeden positiven Werth, der ...r als R ist, jedoch nicht durch Null ersetzt werden.

...ie Reihe 1) enthält auch das zur Entwickelung nach Sinus ...osinus der Vielfachen der Variablen Nöthige, so weit es sich ...omplexe Funktionen bezieht. Sei nämlich:

$$\beta = e^{\frac{2\pi i \alpha}{\omega}},$$

$$f(\alpha) = f\left(\frac{\omega}{2\pi i}\lg\beta\right) = \Phi(\beta),$$

... von $\alpha = 0$ an bis zu einem gewissen Modul eindeutig und ...uirlich, so braucht deshalb im Allgemeinen nicht $\Phi(\beta)$ in dem ...chneten Umfange diese Eigenschaften zu theilen. Denn ist ... ein Werth von $\lg\beta$, so ist der allgemeine Werth dieser Grösse ... $+ 2 s\pi i$, also:

$$\Phi(\beta) = f\left[\frac{\omega}{2\pi i} l(\beta) + s\omega\right],$$

... eine beliebige ganze Zahl ist. Damit dieser Ausdruck ein...g sei, muss für jeden Werth von α, $f(\alpha + \omega) = f(\alpha)$ sein, ... $f(\alpha)$ die Periode ω haben. Setzen wir dies voraus, so ist ...$) = f\left[\frac{\omega}{2\pi i}\, l(\beta)\right]$ in der That eindeutig und continuirlich, so

$\beta = e^{\frac{2\pi\alpha i}{\omega}}$, sei $\alpha = \rho e^{\varphi i}$, so ist

$$\beta = e^{-\frac{2\pi}{\omega}\varrho \sin\varphi} \, e^{\frac{2\pi}{\omega}\varrho i \cos\varphi} .$$

Der Modul von β ist also $e^{-\frac{2\pi}{\omega}\varrho \sin\varphi}$, ein Ausdruck, der, wenn man φ veränderlich denkt, jeden Werth von $e^{-\frac{2\pi\varrho}{\omega}}$ bi $e^{+\frac{2\pi\varrho}{\omega}}$ annehmen kann. Den reellen Werthen von α entspricht immer $\sin\varphi = 0$, also der Modul 1 von β, da nun R der grösste Modul von α war, für welchen f (α) die verlangten Eigenschaften haben muss, so bleibt $\Phi(\beta)$ eindeutig und continuirlich, so lange sich β in einem Ringe befindet, der durch die Kreise mit Radien $e^{-\frac{2\pi R}{\omega}}$ und $e^{+\frac{2\pi R}{\omega}}$ begrenzt ist und man hat innerhalb dieses Ringes nach 1):

$$\Phi(\beta) = \frac{1}{2\pi}\left(\sum_0^\infty \beta^n \int_0^{2\pi} \frac{\Phi(r e^{\varphi i})}{r^n e^{n\varphi i}} d\varphi + \sum_1^\infty \beta^{-n} \int_0^{2\pi} \Phi(r e^{\varphi i}) r^n e^{n\varphi i} d\varphi,\right.$$

wo r irgend ein zwischen $e^{-\frac{2\pi R}{\omega}}$ und $e^{+\frac{2\pi R}{\omega}}$ liegender Werth ist, ein solcher ist z. B. $r = 1$; nimmt man diesen Werth, so wird, da $\Phi(\beta) = f\left(\frac{\omega}{2\pi i} l\beta\right)$ war, $\Phi(e^{\varphi i}) = f\left(\frac{\omega\varphi}{2\pi}\right)$, wenn man also $\beta = e^{\frac{2\pi i\alpha}{\omega}}$ setzt:

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\pi}\left\{\int_0^{2\pi} f\left(\frac{\omega\varphi}{2\pi}\right) d\varphi\right.$$

$$\left. + \sum_{n=1}^{n=\infty} \int_0^{2\pi} d\varphi \, f\left(\frac{\omega\varphi}{2\pi}\right)\left[e^{ni\left(\frac{2\pi\alpha}{\omega} - \varphi\right)} + e^{-ni\left(\frac{2\pi\alpha}{\omega} - \varphi\right)}\right]\right\},$$

oder wenn man $\frac{\omega\varphi}{2\pi} = \lambda$ setzt und statt der Exponentialgrössen trigonometrische einführt:

$$f(\alpha) = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega f(\lambda)\, d\lambda \left[1 + 2\sum_{n=1} \cos \frac{2n\pi}{\omega}(\alpha - \lambda)\right].$$

st die Fourrier'sche Reihe in ihrer gewöhnlichen Form, sie r alle Funktionen $f(\alpha)$, welche die Periode ω haben, so dieselben eindeutig und continuirlich sind. Ist α reell, so man, dass die Gültigkeit der Reihe selbst durch Discontinui- nicht ausgeschlossen wird. Jedoch berührt dieser Fall unsere htungen nicht.

VI. Grundzüge der Residuenrechnung.

n vorigen Abschnitt wurden wir auf Integrale geführt, die ber Kreise mit unendlich kleinem Radius erstreckten, deren unkt ein Discontinuitätspunkt war. Wir wollen jetzt solche le berechnen, unter der Voraussetzung, dass in der Um- g des Discontinuitätspunktes $f(z)$ eindeutig sei. Für den be- eten Punkt sei $z = a$; es lassen sich dann von demselben aus reise ziehen, von denen der Radius des einen beliebig klein, dere so klein ist, dass er keinen zweiten Discontinuitätspunkt iesst, und innerhalb des so entstandenen Ringes wird sich die on $f(a+u)$, die in diesem Raume eindeutig und continuir- , nach Formel 1) des vorigen Abschnittes entwickeln lassen, also:

$$f(a+u) = \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n u^n + \sum_{n=1}^{n=\infty} B_n u^{-n}.$$

s handelt sich nun um das Integral $\int f(a+v)\, dv$, auf einen mit unendlich kleinem Radius ausgedehnt. Wir können uns diesen Kreis immer als innerhalb des bezeichneten Ringes l denken, da der kleinere Radius desselben ja beliebig klein ann; setzt man somit $v = \rho e^{\varphi i}$, so ist das betrachtete In-

$$\int_0^{2\pi} \rho e^{\varphi i} f(a + \rho e^{\varphi i})\, d\varphi = i \sum_{n=0}^{n=\infty} A_n \int_0^{2\pi} \rho^{n+1} e^{(n+1)\varphi i}\, d\varphi$$

$$+ i \sum_{n=1}^{n=\infty} B_n \int_0^{2\pi} \rho^{1-n} e^{(1-n)\varphi i}\, d\varphi.$$

gleich Null, mit Ausnahme desjenigen der zweiten Summe, welches $n = 1$ entspricht, dies ist nämlich $\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi$. Man hat also:

$$\int f(a+v)\,dv = 2\pi i B_1.$$

B_1 ist der Coefficient von $\frac{1}{v}$ in der Entwickelung von $f(a+v)$ nach negativen und positiven ganzen Potenzen von v. Diesen Entwickelungscoefficienten nennt Cauchy das Residuum von $f(a+v)$. Wir bezeichnen ihn durch das Symbol:

$$B_1 = \operatorname{Res} f(a).$$

Es ist also das in dem bezeichneten unendlich kleinen Kreise um den Discontinuitätspunkt genommene Integral gleich dem entsprechenden Residuum, mit $2\pi i$ multiplicirt. Nach IV. dieses Anhanges ist also, wenn $f(z)$ innerhalb eines beliebigen Umfanges eindeutig, aber nicht continuirlich ist, also die Discontinuitätspunkte $a_1, a_2 \ldots a_n$ enthält:

$$\int f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{p=1}^{p=n} \operatorname{Res} f(a_p),$$

wo das Integral sich über den ganzen Umfang erstreckt. Dieser Satz giebt, um ein Beispiel seiner reichen Anwendbarkeit anzuführen, das fruchtbarste bis jetzt bekannte Verfahren zur Berechnung bestimmter Integrale. Nehmen wir nämlich an, der bezeichnete Umfang sei ein Rechteck, dessen eine Seite ein Stück $2a$ der Abscissenaxe bilde, in dessen Mitte sich der Anfangspunkt O befinde, so ist, wenn man $z = x + yi$ setzt, das Integral zu nehmen für jede der vier Seiten, d. h. 1) x von $-a$ bis $+a$, $y = 0$; 2) $x = +a$, y von 0 bis $+b$; 3) x von $+a$ bis $-a$, $y = b$; 4) $x = -a$, y von b bis 0. Denkt man nun $a = b = \infty$ und nimmt an, dass $f(x+yi)$ für $x = \pm\infty$ und $y = +\infty$ verschwinde, so haben diejenigen drei Integrale, welche sich auf die nicht in die Abscissenaxe fallenden Seiten des Rechtecks beziehen, Null zum Argument, und das Integral ist nur auf der Abscissenaxe, also mit reeller Variable von $-\infty$ bis $+\infty$ zu nehmen, es ist also:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)\,dz = 2\pi i \sum \operatorname{Res} f(a_p),$$

wo die Summe die allen Discontinuitäten a, deren imaginärer Theil positiv ist, entsprechenden Residuen umfasst. Vorausgesetzt ist, dass die Funktion auf der Abscissenaxe selbst continuirlich ist. Da die

en Bedingung, dass nämlich f (z) für jeden reellen oder imaginären unendlichen Werth verschwinde, das bestimmte Integral berechnen.

Eine andere Anwendung ist folgende. Bezeichnen wir die Entwickelungen von $f(\alpha)$ in Abschnitt V, 1) und 2) mit U und nehmen an, dass die Funktion innerhalb eines Kreises oder Ringes eindeutig, aber nicht mehr continuirlich ist, so kommt nach IV. in die Entwickelung des Integrales von $\frac{f(z)}{z-\alpha}$, welche V, A) gegeben ist, noch ein Theil, der von den um die Discontinuitätspunkte gelegenen unendlich kleinen Kreisen herrührt, hinzu; dieser Theil ist $\sum \int \frac{f(a+h)\,dh}{a+h-\alpha}$, wo a den entsprechenden Discontinuitätspunkt bedeutet, das Integral auf den entsprechenden unendlich kleinen Kreis und das Summenzeichen auf alle im Ringe oder Kreise liegenden Discontinuitäten a von f (z) geht. Es ist aber:

$$\int \frac{f(a+h)\,dh}{a+h-\alpha} = 2\pi i \operatorname{Res} \frac{f(a)}{a-\alpha}$$

mithin geht die Entwickelung in V, 1) und 2) über in:

$$f(\alpha) = U + \sum \operatorname{Res} \frac{f(a)}{\alpha-a}.$$

U bezeichnet im Fall 1), wo die Eindeutigkeit innerhalb eines Ringes stattfand, eine nach positiven und negativen ganzen Potenzen von α fortschreitende, im Falle 2), wo sie in einem Kreise stattfand, eine nur nach positiven Potenzen fortschreitende Reihe. Im letztern Falle enthält unsere Entwickelung die Zerlegung aller eindeutigen (algebraischen oder transcendenten) Funktionen in Partialbrüche. Was den Ausdruck $\operatorname{Res}\left(\frac{f(a)}{\alpha-a}\right)$ anbetrifft, so lässt sich um den Punkt a herum f (a + u), wie oben gesehen, in eine nach positiven und negativen Potenzen von u fortschreitende Reihe:

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} A_n u^n + \sum_{n=1}^{n=\infty} B_n u^{-n}$$

entwickeln.

Da α ungleich a ist, kann u immer, abgesehen vom Vorzeichen, kleiner als $\alpha - a$ angenommen werden, und es ist:

$$\frac{1}{\alpha - a - u} = \frac{1}{\alpha - a} \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{u^p}{(\alpha - a)^p},$$

also der in $\frac{f(a)}{\alpha - a}$ mit $\frac{1}{u}$ multiplicirte Theil:

$$\text{Res}\, \frac{f(a)}{\alpha - a} = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{B_n}{(\alpha - a)^n}.$$

Findet in a eine Discontinuität erster Klasse statt (siehe III. des Anhangs), so beschränkt sich diese Summe jedoch auf eine endliche Anzahl Glieder. Es ist nämlich $f(a) = \infty$; $\frac{1}{f(a)} = 0$ wird dann continuirlich und es lässt sich für hinreichend kleines u $\frac{1}{f(a+u)}$ in eine nach ganzen positiven Potenzen von u geordnete Reihe entwickeln. Sei:

$$\frac{1}{f(a+u)} = C_p\, u^p + C_{p+1}\, u^{p+1} + \ldots;$$

es verschwindet nämlich wegen $\frac{1}{f(a)} = 0$ jedenfalls das von u freie Glied der Entwickelung; es ist indess möglich, dass ausserdem noch eine beliebige Anzahl, also, wie hier angenommen wurde, $(p-1)$ Glieder verschwinden, natürlich kann p auch gleich Eins sein. Es ist dann $\lim \frac{1}{u^p f(a+u)} = C_p$ für die Grenze $u = 0$, und in diesem Falle nennt man den entsprechenden Punkt a eine Unendlichkeit p^{ter} Ordnung für $f(z)$. Die Funktion $u^p f(a+u) = \varphi u$ ist dann um $a = 0$ herum continuirlich und lässt sich nach ganzen positiven Potenzen entwickeln. Sei:

$$\varphi u = B_p + B_{p-1}\, u + \ldots + B_1\, u^{p-1} + A_0 + A_1\, u + \ldots,$$

so ist auch:

$$f(a+u) = \frac{B_p}{u^p} + \frac{B_{p-1}}{u^{p-1}} + \ldots + \frac{B_1}{u} + A_0 + A_1\, u + \ldots,$$

also der negative Theil von $f(a+u)$ beschränkt sich auf p Glieder, und demzufolge ist:

$$\text{Res}\, \frac{f(a)}{\alpha - a} = \sum_{n=1}^{n=p} \frac{B_n}{(\alpha - a)^n}.$$

verfolgen liessen, hier abbrechen.*)

---

*) Der Vollständigkeit wegen erwähnen wir hier noch die Art, wie
ie Entwickelungen in V. und VI. in der Nähe eines kritischen
es modificiren. Möge f (x) für $x = A$ derart mehrdeutig sein, dass
n Umkreisungen des Punktes A f (x) seinen anfänglichen Werth
erhält. Setzen wir $x = A + \varrho e^{\varphi i}$, so ist also:

$$f(A + \varrho) = f(A + \varrho e^{2n\pi i}). \qquad 1)$$

nun: $y = (x - A)^{\frac{1}{n}}$ und $f(x) = \varphi(y)$, so ist zunächst, so lange
eine eindeutige Funktion von x ist, $\varphi(y)$ auch eine solche von y,
jedem y nur ein Werth von $x = A + y^n$ gehört. Setzt man
$x = A + \varrho e^{\varphi i}$, so wird $y = \varrho^{\frac{1}{n}} e^{\frac{\varphi i}{n}}$; da ϱ positiv war, so kann
$\varrho^{\frac{1}{n}}$ stets als positiv betrachtet werden. Gleichung 1) verwandelt
:

$$\varphi\left(\varrho^{\frac{1}{n}}\right) = \varphi\left(\varrho^{\frac{1}{n}}\, e^{2\pi i}\right),$$

der Modul von y. Es kommt also $\varphi(y)$ schon nach einmaligem
isen des Punktes A auf seinen früheren Werth zurück, ist mithin
für A eindeutig. Es lässt sich also $\varphi(y) = f(x)$ nach ganzen
en Potenzen von y oder $(x - A)^{\frac{1}{n}}$ entwickeln innerhalb eines um
ogenen Kreises, in welchem sich ausser A keine kritischen und
tinuitätspunkte befinden. Finden Discontinuitätspunkte statt, so ist
esiduensumme von $\varphi(y)$ für diese Punkte hinzuzufügen; ist der
he Punkt A zugleich ein Discontinuitätspunkt, so findet sich in der
ensumme das entsprechende, auf A bezügliche Glied:

$$\sum_{s=1}^{s=p} \frac{B_s}{(x-A)^{\frac{s}{n}}}.$$

B. Reduktion der Integrale algebraischer Funktionen, welche eine Quadratwurzel von einer ganzen Funktion vierten Grades enthalten, auf elliptische Integrale.

Diese elementare Betrachtung gehört zwar in die vom Verfasser übergangene Theorie der Transformation, sie ist jedoch selbst für die einfachsten Anwendungen so nothwendig, dass der Uebersetzer es für gut hält, dieselbe hier nachzutragen.

Sei das Integral:

$$\int \frac{F(x)\,dx}{\varphi(x)\sqrt{\psi(x)}}$$

gegeben, wo $F(x)$ und $\varphi(x)$ ganze rationale Funktionen von x von beliebigem, $\psi(x)$ eine solche vom vierten Grade sei, so lassen sich durch eine Transformation aus diesem Ausdrucke die mit ungraden Potenzen behafteten Glieder entfernen. Es ist zunächst nämlich $\sqrt{\psi(x)}$ immer auf die Form $\sqrt{ax^2+2bx+c}\,\sqrt{a_1x^2+2b_1x+c_1}$ zu bringen, wo die Coefficienten alle reell sind, wenn die Coefficienten von $\psi(x)$ reell waren. Setzt man nun $x=\frac{p+qy}{1+y}$, so wird

$$\sqrt{\psi(x)} = \frac{1}{(1+y)^2}\sqrt{a(p+qy)^2+2b(p+qy)(1+y)+c(1+y)^2}$$
$$\times\sqrt{a_1(p+qy)^2+2b_1(p+qy)(1+y)+c_1(1+y)^2};$$

um hierin die mit y multiplicirten Ausdrücke verschwinden zu machen, setzt man:

$$apq+b(p+q)+c=0$$

und

$$a_1pq+b_1(p+q)+c_1=0.$$

Habe die Gleichung $ax^2+2bx+c=0$ die Wurzeln α und β und $a_1x^2+2b_1x+c_1=0$ die Wurzeln γ und δ, so ist:

$\sqrt{\varphi(x)} = \sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)},$

$$-(\alpha+\beta) = 2\frac{b}{a}, \qquad \alpha\beta = \frac{c}{a},$$

$$-(\gamma+\delta) = 2\frac{b_1}{a_1}, \qquad \gamma\delta = \frac{c_1}{a_1},$$

die beiden Bedingungsgleichungen für das Verschwinden der
icienten von y werden:

$$pq - \frac{\alpha+\beta}{2}(p+q) + \alpha\beta = 0,$$

$$pq - \frac{\gamma+\delta}{2}(p+q) + \gamma\delta = 0,$$

$$p+q = \frac{2(\alpha\beta-\gamma\delta)}{\alpha+\beta-\gamma-\delta},$$

$$pq = \frac{\alpha+\beta(\alpha\beta-\gamma\delta) - \alpha\beta(\alpha+\beta-\gamma-\delta)}{\alpha+\beta-\gamma-\delta}.$$

die Coefficienten von $\psi(x)$ reell sind, werden auch p und q
Die Bedingung für letzteres ist nämlich die, dass $(p-q)^2$
iv sein muss. $p+q$ und pq sind nun reell, die Grössen α und
d entweder reell oder von der Form $\lambda+\mu i$ und $\lambda-\mu i$, also
nfalls $\alpha+\beta$ und $\alpha\beta$ reell; Gleiches gilt von γ und δ. Es er-
t sich nun:

$$\left(\frac{p-q}{2}\right)^2 = \left(\frac{p+q}{2}\right)^2 - pq = \frac{(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)(\beta-\delta)}{(\alpha+\beta-\gamma-\delta)^2}.$$

er Ausdruck ist in der That positiv; denn sind z. B. γ und δ
ginäre von der Form $\lambda+\mu i$, $\lambda-\mu i$, so ergiebt sich für den
er:

$$[(\alpha-\lambda)^2 + \mu^2] \quad [(\beta-\lambda)^2 + \mu^2].$$

auch α und β von der Form $\lambda_1+\mu_1 i$, $\lambda_1-\mu_1 i$, so ergiebt
für den Zähler:

$$[(\lambda_1-\lambda)^2 + (\mu_1+\mu)^2] \quad [(\lambda_1-\lambda)^2 + (\mu_1-\mu)^2];$$

$\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta$ reell, so kann man diese Ausdrücke so ordnen, dass
$> \beta > \gamma > \delta$ ist, wo dann sich ebenfalls der Zähler als

p und q also immer reell bestimmen und es wird:

$$\sqrt{\psi(x)} = \sqrt{(c y^2 + d)} \sqrt{(e y^2 + f)}.$$

Setzt man auch in $\frac{F(x)}{\varphi(x)}$ $x = \frac{p+qy}{1+y}$ ein, so hört dieser Ausdruck nicht auf rational zu sein.

Nun kommt es darauf an, das Integral:

$$\int \frac{F(y)\,dy}{\varphi(y)\sqrt{(cy^2+d)(ey^2+f)}}$$

auf die Form $\int U\,dz$ zu bringen, wo U eine rationale Funktion von $\sin \operatorname{am} z$, $\cos \operatorname{am} z$ oder $\Delta \operatorname{am} z$ ist. Wie im Buche selbst (Abschnitt G.) gezeigt, lässt sich dieser Ausdruck nämlich immer auf eine der drei Gattungen von elliptischen Funktionen zurückführen. Zunächst sind in unserm Integral die Faktoren c und e durch Division wegzuschaffen. Versteht man dann unter a und b beliebige reelle Grössen, so nimmt der Wurzelausdruck immer eine der folgenden fünf Formen an:

1) $\sqrt{(y^2 + a^2)(y^2 + b^2)}$,

2) $\sqrt{(y^2 + a^2)(y^2 - b^2)}$,

3) $\sqrt{-(y^2 + a^2)(y^2 - b^2)}$,

4) $\sqrt{(y^2 - a^2)(y^2 - b^2)}$,

5) $\sqrt{-(y^2 - a^2)(y^2 - b^2)}$.

Wir setzen nun, indem wir unter k den Modul von sin am (z) verstehen, in jedem dieser 5 Fälle:

1) $y = b \operatorname{tg} \operatorname{am} z, \quad k^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2}$,

2) $y = \frac{b}{\cos \operatorname{am} z}, \quad k^2 = \frac{a^2}{a^2+b^2}$,

3) $y = b \cos \operatorname{am} z, \quad k^2 = \frac{b^2}{a^2+b^2}$,

4) $y = b \sin \operatorname{am} z, \quad k^2 = \frac{b^2}{a^2}$,

5) $y = \frac{b}{\cos \operatorname{am} z}, \quad k^2 = \frac{a^2}{a^2-b^2}$.

erhält dann bezüglich, wenn wir die Wurzelausdrücke mit U
hnen:

$$1)\quad U = ab \sec^2 \operatorname{am} z\, \Delta \operatorname{am} z, \qquad dy = \frac{b\, d \operatorname{am} z}{\cos^2 \operatorname{am} z},$$

$$2)\quad U = \frac{b\sqrt{a^2+b^2}\sin \operatorname{am} z}{\cos^2 \operatorname{am} z}\Delta \operatorname{am} z, \qquad dy = \frac{b \sin \operatorname{am} z\, d \operatorname{am} z}{\cos^2 \operatorname{am} z},$$

$$3)\quad U = b\sqrt{a^2+b^2}\sin \operatorname{am} z\, \Delta \operatorname{am} z, \qquad dy = -b \sin \operatorname{am} z\, d \operatorname{am} z,$$

$$4)\quad U = ab \cos \operatorname{am} z\, \Delta \operatorname{am} z, \qquad dy = b \cos \operatorname{am} z\, d \operatorname{am} z,$$

$$5)\quad U = \frac{b\sqrt{a^2-b^2}\sin \operatorname{am} z}{\cos^2 \operatorname{am} z}\Delta \operatorname{am} z, \qquad dy = \frac{b \sin \operatorname{am} z}{\cos^2 \operatorname{am} z} d \operatorname{am} z,$$

la $\frac{d \operatorname{am} z}{\Delta \operatorname{am} z} = dz$ ist, ergiebt sich für $\frac{dy}{U}$ in jedem der 5 Fälle:

$$1)\ \frac{1}{a}dz, \qquad 2)\ \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}dz, \qquad 3)\ -\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}dz,$$

$$4)\ \frac{1}{a}dz, \qquad 5)\ \frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}dz.$$

er rationale Theil des Integrals $\frac{F(y)}{\varphi(y)}$ ist eine rationale Funk-
on sin am z, cos am z oder tg am z. Die Reduktion auf eine
ei Formen elliptischer Integrale kann also immer auf die im
gegebene Art bewerkstelligt werden.

Druckfehler.

Seite 11, Zeile 1 von unten, statt: $\sum \frac{1}{mx + m^2}$ lies: $- \sum \frac{x}{mx + m^2}$.

„ 15, „ 11 von oben, statt: Addition, lies: Definition.

„ 32, „ 12 von unten, statt: cos x, lies: cos 2 x.

„ 61, „ 2 von unten, statt: vierten Grade, lies; vier nten Grade.

Druck von G. Hickethier in Berlin.